Pendulul conic

Neculai Andrei
Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania,
Academy of Romanian Scientists
E-mail: nandrei@ici.ro

Considerăm un pendul conic format dintr-o masă m suspendată de un fir inextensibil de lungime L care se deplasează fără frecare, cu viteză constantă v, de-a lungul unui cerc de rază r la un unghi θ față de verticală, ca în figura 1.

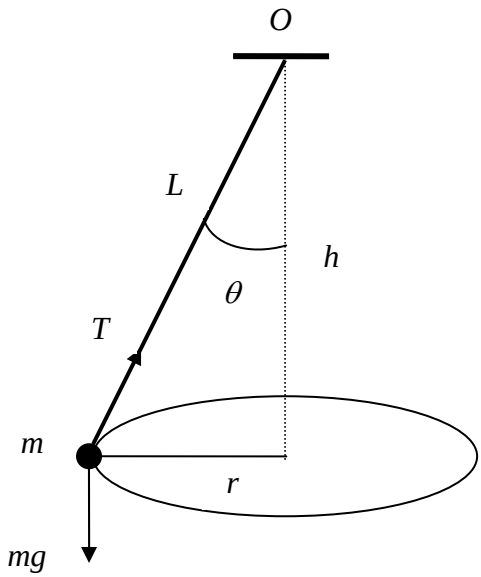

Fig. 1. Pendulul conic.

Asupra masei m acționează două forțe: tensiunea T în fir direcționată către punctul de suspensie O şi greutatea mg. Tensiunea T se poate descompune în componenta orizontală $T\sin\theta$ şi cea verticală $T\cos\theta$. Din legea a doua a lui Newton rezultă că componenta orizontală $T\sin\theta$ este egală cu accelerația centripetă, adică

$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, componenta verticală $T\cos\theta$ este egală şi de sens opus cu greutatea masei, adică

$$T\cos\theta = mg. \tag{2}$$

Eliminând din (1) şi (2) mărimile T şi m, obținem

$$\frac{g}{\cos\theta} = \frac{v^2}{r\sin\theta}. \tag{3}$$

Deoarece viteza pendulului este constantă, putem scrie că

$$v = \frac{2\pi r}{t}.$$

Introducând această expresie a vitezei în (3) obținem

$$\frac{g}{\cos\theta} = \frac{4\pi^2 r}{t^2\sin\theta},$$

de unde rezultă imediat expresia timpului necesar ca masa m să execute o rotație completă:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{gtg\theta}}.$$

Dar, $r = L\sin\theta,$ de unde obținem:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}.$$

Pentru unghiuri mici (viteze mici ale pendulului) se poate utiliza aproximarea $\cos\theta \approx 1,$ ceea ce arată că

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{4}$$

Adică în aceste condiții, perioada de rotație a pendulului conic este egală cu aceea a unui pendul clasic de aceeaşi lungime. Vedem că pentru unghiuri mici, perioada de rotație este independentă de unghiul θ, adică cu alte cuvinte, perioada de rotație este aproximativ independentă de forța aplicată masei m pentru a o ține pe traiectoria de rotație. Relația (4) este cunoscută ca *legea lui Huygens* pentru perioadă. Această proprietate la viteze mici se numeşte *izocronism* şi se întâlneşte şi la pendulul clasic. Această proprietate de izocronism a pendulelor a fost descoperită de Galileo.

January 19, 2010