Pendulul invers rotativ

Neculai Andrei
Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania,
Academy of Romanian Scientists
E-mail: nandrei@ici.ro

Să considerăm un pendul invers rotativ format dintr-un braț orizontal de masă m_0 cu un moment de inerție I_0 față de centrul de masă şi lungime L_0 de la articulație la centrul de masă, care este antrenat de un motor cu ax vertical ce dezvoltă un moment τ_m. Pe acest braț se sprijină articulat un pendul invers de masă m_1 concentrată în vârful acestuia, moment de inerție I_1 şi lungime l_1, ca în figura 1. Fie C_0 şi C_1 coeficienții de frecare vâscoasă a axului de rotație a motorului şi respectiv a articulației pendulului cu brațul.

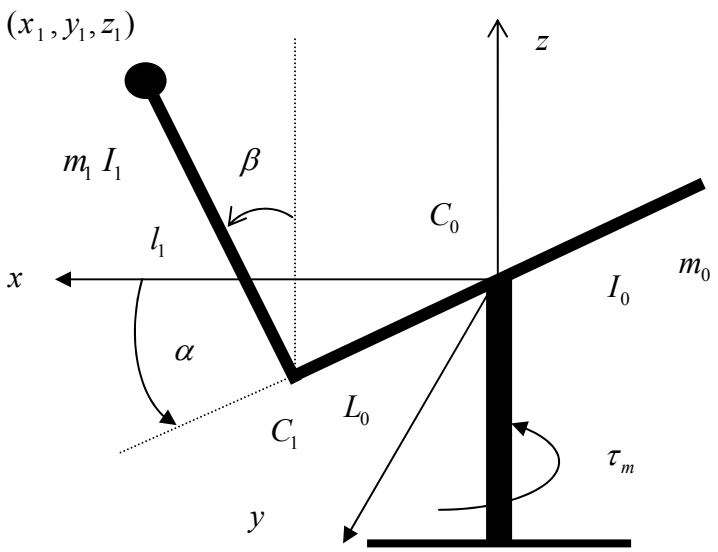

Fig. 1. Pendulul invers rotativ

Pentru a scrie ecuațiile de mişcare ale sistemului definim α poziția unghiulară a brațului în planul orizontal şi β poziția unghiulară a pendulului față de verticala locului. Vom proceda prin a scrie energia cinetică şi potențială a sistemului de corpuri, Lagrangeanul şi apoi ecuațiile Lagrange care definesc ecuațiile de mişcare.
Energia cinetică a brațului pendulului invers rotativ este

$$T_b = \frac{1}{2} I_0 \dot{\alpha}^2.$$

Energia potențială a brațului este $V_b = 0$.
Pentru a calcula energia cinetică şi potențială a pendulului să calculăm coordonatele punctului masic concentrat în vârful acestuia. În figura 2 prezentăm proiecția sistemului în planul orizontal (xOy). Din figura 2 şi respectiv figura 1 se vede uşor că

$$x_1 = L_0 \cos\alpha + l_1 \sin\beta \sin\alpha,$$
$$y_1 = L_0 \sin\alpha - l_1 \sin\beta \cos\alpha,$$

$$z_1 = l_1 \cos\beta.$$

Deci

$$\dot{x}_1 = -L_0\dot{\alpha}\sin\alpha + l_1\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha + l_1\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\dot{y}_1 = L_0\dot{\alpha}\cos\alpha - l_1\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha + l_1\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\dot{z}_1 = -l_1\dot{\beta}\sin\beta.$$

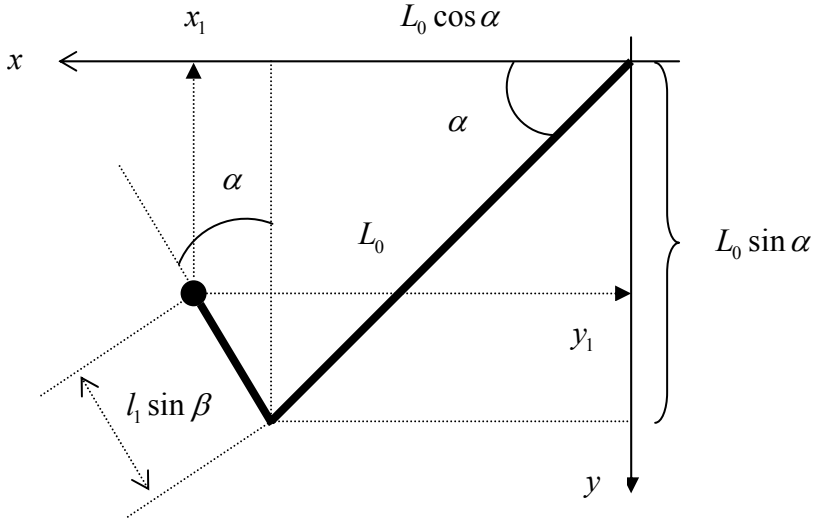

Fig. 2. Proiecția pendulului invers rotativ în planul orizontal (xOy).

Cu acestea putem scrie

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = L_0^2\dot{\alpha}^2 + l_1^2\dot{\beta}^2 + l_1^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta - 2L_0 l_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta.$$

Energia cinetică T_p a pendulului este

$$T_p = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\beta}^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1L_0^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + I_1)\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta - m_1L_0l_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta.$$

Energia potențială V_p a pendulului este

$$V_p = m_1 g z_1 = m_1 l_1 g\cos\beta.$$

Funcția Lagrange a sistemului se scrie sub forma

$$L = (T_b + T_p) - (V_b + V_p)$$
$$= \frac{1}{2}(m_1L_0^2 + I_0)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + I_1)\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta$$
$$-m_1L_0l_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta - m_1l_1g\cos\beta. \qquad (1)$$

Utilizând aceste dezvoltări, ecuațiile Lagrange sunt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = \tau_\alpha,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\beta} = \tau_\beta,$$

unde τ_α este momentul asupra axei de rotație a brațului în direcția care creşte unghiul α, iar τ_β este momentul asupra pendulului în direcția care creşte unghiul β. Ținând seama de coeficienții de frecare vâscoasă C_0 şi C_1 aceste momente se pot scrie sub forma

$$\tau_\alpha = \tau_m - C_0\dot{\alpha},$$
$$\tau_\beta = -C_1\dot{\beta}.$$

Din (1) obținem succesiv

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (m_1L_0^2 + I_0)\dot{\alpha} + m_1l_1^2\dot{\alpha}\sin^2\beta - m_1L_0l_1\dot{\beta}\cos\beta,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) = (m_1L_0^2 + I_0)\ddot{\alpha} + m_1l_1^2\ddot{\alpha}\sin^2\beta - m_1L_0l_1\ddot{\beta}\cos\beta$$
$$+2m_1l_1^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + m_1L_0l_1\dot{\beta}^2\sin\beta,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + m_1L_0l_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + m_1l_1g\sin\beta,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = (m_1l_1^2 + I_1)\dot{\beta} - m_1L_0l_1\dot{\alpha}\cos\beta,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\right) = (m_1l_1^2 + I_1)\ddot{\beta} - m_1L_0l_1\ddot{\alpha}\cos\beta + m_1L_0l_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta.$$

Cu acestea, ecuațiile Lagrange ale pendulului invers rotativ sunt următoarele

$$(m_1L_0^2 + I_0)\ddot{\alpha} + m_1l_1^2\ddot{\alpha}\sin^2\beta - m_1L_0l_1\ddot{\beta}\cos\beta$$
$$+2m_1l_1^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + m_1L_0l_1\dot{\beta}^2\sin\beta = \tau_m - C_0\dot{\alpha},$$
$$(m_1l_1^2 + I_1)\ddot{\beta} - m_1L_0l_1\ddot{\alpha}\cos\beta - m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - m_1l_1g\sin\beta = -C_1\dot{\beta}.$$

În formă matriceală ecuațiile de mişcare ale pendulului invers rotativ se pot exprima sub forma

$$M(\alpha,\beta)\begin{bmatrix}\ddot{\alpha}\\ \ddot{\beta}\end{bmatrix} + C(\alpha,\beta)\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix} = Q,$$

unde

$$M(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} m_1L_0^2 + m_1l_1^2\sin^2\beta + I_0 & -m_1L_0l_1\cos\beta \\ -m_1L_0l_1\cos\beta & m_1l_1^2 + I_1 \end{bmatrix}$$

este *matricea de inerție*, simetrică şi pozitiv definită,

$$C(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 2m_1l_1^2\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + C_0 & m_1L_0l_1\dot{\beta}\sin\beta \\ -m_1l_1^2\dot{\alpha}\sin\beta\cos\beta & C_1 \end{bmatrix}$$

este *matricea Coriolis* şi

$$Q = \begin{bmatrix} \tau_m \\ m_1gl_1\sin\beta \end{bmatrix}.$$

În cele ce urmează să prezentăm ecuațiile de mişcare liniarizate ale pendulului rotativ în jurul punctului $\dot{\alpha}=0,\ \beta=0,\ \dot{\beta}=0.$ Pentru aceasta notăm:

$$f(\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=(I_0+m_1L_0^2+m_1l_1^2\sin^2\beta)\ddot{\alpha}+m_1L_0l_1\ddot{\beta}\cos\beta$$
$$+2m_1l_1^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta+m_1L_0l_1\dot{\beta}^2\sin\beta+C_0\dot{\alpha}-\tau_m,$$
$$g(\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=-m_1L_0l_1\ddot{\alpha}\cos\beta+(m_1l_1^2+I_1)\ddot{\beta}-m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-m_1l_1g\sin\beta+C_1\dot{\beta}.$$

Atunci

$$f(0,0,0)=(I_0+m_1L_0^2)\ddot{\alpha}-m_1L_0l_1\ddot{\beta}-\tau_m,$$
$$\frac{\partial f}{\partial\dot{\alpha}}=2m_1l_1^2\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta+C_0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=m_1L_0l_1\ddot{\beta}\sin\beta+2m_1l_1^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos^2\beta+m_1L_0l_1\dot{\beta}^2\cos\beta+2m_1l_1^2\ddot{\alpha}\sin\beta\cos\beta,$$
$$\frac{\partial f}{\partial\dot{\beta}}=2m_1l_1^2\dot{\alpha}\sin\beta\cos\beta+2m_1L_0l_1\dot{\beta}\sin\beta.$$

Ca atare,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\alpha}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=C_0;\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial\beta}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=0;\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\beta}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=0.$$

În acelaşi timp

$$g(0,0,0)=-m_1L_0l_1\ddot{\alpha}+(I_1+m_1l_1^2)\ddot{\beta}.$$
$$\frac{\partial g}{\partial\dot{\alpha}}=m_1L_0l_1\dot{\beta}\sin\beta-2m_1l_1^2\dot{\alpha}\sin\beta\cos\beta-m_1L_0l_1\dot{\beta}\sin\beta,$$
$$\frac{\partial g}{\partial\beta}=m_1L_0l_1\ddot{\alpha}\sin\beta-m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+m_1l_1^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta-m_1gl_1\cos\beta,$$
$$\frac{\partial g}{\partial\dot{\beta}}=C_1.$$

Ca atare,

$$\left.\frac{\partial g}{\partial\dot{\alpha}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=0;\qquad \left.\frac{\partial g}{\partial\beta}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=-m_1gl_1;\qquad \left.\frac{\partial g}{\partial\dot{\beta}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}=C_1.$$

Deci ecuațiile liniarizate se scriu sub forma

$$f(\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=f(0,0,0)+\left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\alpha}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\dot{\alpha}-0)+\left.\frac{\partial f}{\partial\beta}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\beta-0)+\left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\beta}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\dot{\beta}-0),$$
$$g(\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta})=g(0,0,0)+\left.\frac{\partial g}{\partial\dot{\alpha}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\dot{\alpha}-0)+\left.\frac{\partial g}{\partial\beta}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\beta-0)+\left.\frac{\partial g}{\partial\dot{\beta}}\right|_{\substack{\dot{\alpha}=0\\ \beta=0\\ \dot{\beta}=0}}(\dot{\beta}-0).$$

Adică

$$(I_0+m_1L_0^2)\ddot{\alpha}-m_1L_0l_1\ddot{\beta}+C_0\dot{\alpha}-\tau_m=0,$$
$$-m_1L_0l_1\ddot{\alpha}+(I_1+m_1l_1^2)\ddot{\beta}+C_1\dot{\beta}-m_1gl_1\beta=0.$$

Referințe

V. Sukontanakarn, M. Parnichkun, *Real-time optimal control for rotary inverted pendulum.* Americal Journal of Applied Sciences, vol. 6, No. 6, (2009), pp.1106-1115.

January 18, 2010