Poziția bipedă

Neculai Andrei
Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania,
Academy of Romanian Scientists
E-mail: nandrei@ici.ro

Poziția bipedă a unui om se poate foarte bine asimila ca a unui pendul invers de masă m, cu centrul de greutate plasat la o distanță l față de pământ, cu un moment de inerție I față de centrul de greutate, asupra căruia acționează un arc cu constanta k, ca în figura 1. Presupunem că arcul are o lungime corespunzătoare unui unghi inițial θ_0 al pendulului față de verticala locului.

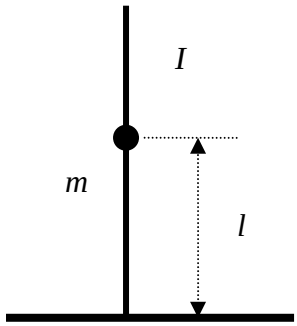

Fig. 1. Poziția bipedă.

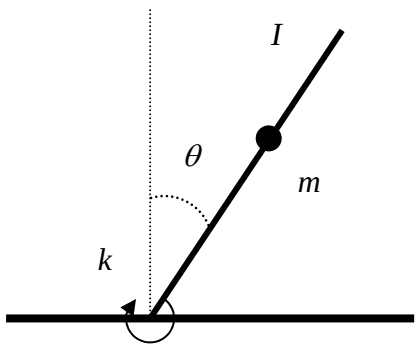

Fig. 2. Pendulul invers cu arc.

În poziție verticală energia potențială a pendulului este zero. Totuşi, când pendulul invers se apleacă cu un unghi θ, ca în figura 2, energia potențială conține doi termeni: energia aferentă arcului V_a şi cea corespunzătoare accelerației gravitaționale V_g, unde

$$V_a = \frac{1}{2}k[(\theta-\theta_0)^2-(0-\theta_0)^2]$$

$$V_g = mgl(\cos\theta - 1)$$

Deci energia potențială este

$$V = \frac{1}{2}k[(\theta-\theta_0)^2-\theta_0^2]+mgl(\cos\theta-1).$$

Energia cinetică a pendulului invers înclinat se calculează imediat ca

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2.$$

Cu acestea Lagrangeanul pendulului invers înclinat este $L = T - V$, adică

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(\theta-\theta_0)^2+\frac{1}{2}k\theta_0^2-mgl\cos\theta+mgl.$$

Ecuațiile Lagrange sunt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0,$$

adică

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} + k(\theta - \theta_0) - mgl\sin\theta = 0\,,$$

care reprezintă ecuația de mişcare a pendulului invers înclinat (poziția bipedă a unui om înclinat) asupra căruia acționează un arc cu constanta k.

Unghiul θ_b corespunzător poziției de echilibru (în balans) este obținut din ecuația

$$F(\theta) = k(\theta - \theta_0) - mgl\sin\theta = 0.$$

Condiția $\theta_b = 0$ înseamnă că starea de balans este în poziție verticală. Aceasta cere $\theta_0 = 0.$ Ca atare, inițial arcul trebuie încordat astfel încât pendulul invers să fie în poziție verticală. Totuşi, această condiție asupra lungimii arcului nu este suficientă deoarece pendulului trebuie să fie stabil. Introducem variabila $\gamma = \theta - \theta_b$. Atunci $\theta = \gamma + \theta_b$ şi

$$F(\gamma + \theta_b) = k(\gamma + \theta_b - \theta_0) - mgl\sin(\gamma + \theta_b).$$

Adică, ecuația de mişcare a pendulului invers cu arc este

$$(ml^2 + I)\ddot{\gamma} + F(\theta_b + \gamma) = 0$$

Pentru analiza stabilității, presupunem că γ este suficient de mic. Dezvoltând în serie Taylor în jurul lui $\gamma = 0$ obținem

$$F(\theta_b + \gamma) = F(\theta_b) + (k - mgl\cos\theta_b)\gamma + \frac{1}{2}F''(\theta_b)\gamma^2 + \cdots.$$

Dar $F(\theta_b) = 0.$ Neglijând termenii de ordin superior obținem

$$(ml^2 + I)\ddot{\gamma} + (k - mgl\cos\theta_b)\gamma = 0.$$

Pentru ca unghiul θ_b să fie o poziție stabilă trebuie ca

$$k > mgl\cos\theta_b.$$

În cazul alinierii verticale $\theta_b = 0,$ adică

$$k > mgl,$$

ceea ce înseamnă că pentru a avea o poziție de echilibru momentul generat de arc trebuie să fie mai mare decât cel produs de accelerația gravitațională.

Referințe

Kui Fu Chen, *Standing human – an invreted pendulum*. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.2, No.3, September 2008, pp 197-200.

January 13, 2010