Pendulul invers dublu

Neculai Andrei
Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania,
Academy of Romanian Scientists
E-mail: nandrei@ici.ro

Să considerăm un pendul dublu format din două brațe articulate pe un cărucior de masă m_0 asupra căruia se poate aplica o forță u, ca în figura 1. Fie θ_0 poziția căruciorului fața de un referențial dat şi θ_1 şi θ_2 unghiurile brațelor pendulului față de verticala locului. Fie L_1 şi L_2 lungimile brațelor pendulului şi l_1 şi l_2 distanța de la punctul de articulație a brațelor pendulului la centrul de masă al acestora. Fie totodată m_1 şi m_2 masele celor două brațe ale pendulului şi I_1 şi I_2 momentele de inerție ale brațelor pendulului față de centrul lor de masă.

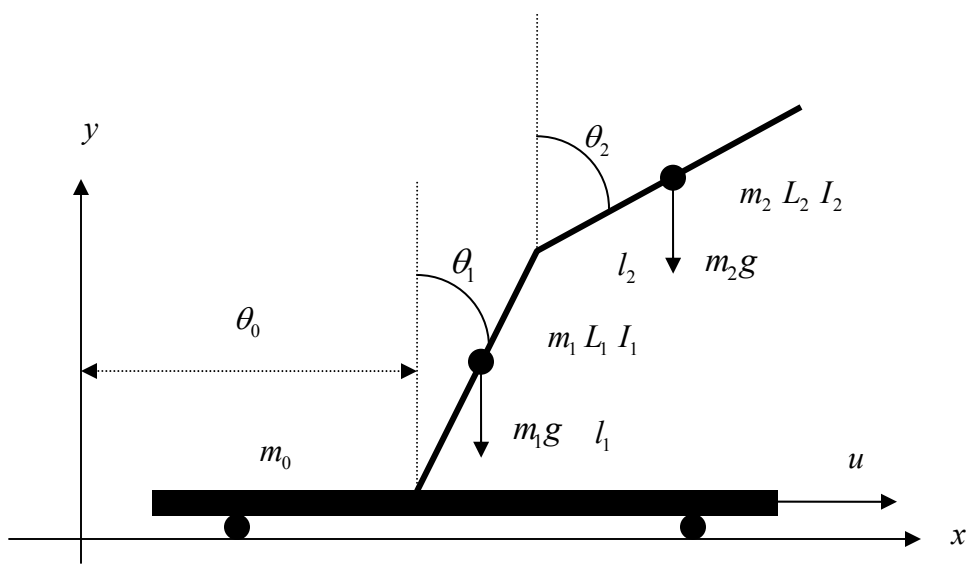

Fig. 1. Pendulul dublu invers pe un cărucior.

Pentru a scrie ecuațiile de mişcare ale acestui sistem mecanic procedăm într-o manieră canonică utilizând ecuațiile Lagrange. Pentru primul braț al pendulului, din figura 2, coordonatele centrului de greutate al acestuia sunt

$$x_1 = \theta_0 + l_1 \sin\theta_1,$$
$$y_1 = l_1 \cos\theta_1.$$

Deci

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_0 + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1,$$
$$\dot{y}_1 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1.$$

Pentru cel de-al doilea braț, din figura 3, coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_2 = \theta_0 + L_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2,$$
$$y_2 = L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2.$$

Deci

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_0 + L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2,$$
$$\dot{y}_2 = -L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2.$$

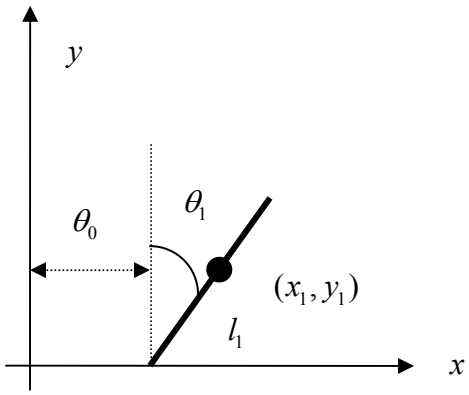

Fig. 2. Coordonatele (x_1, y_1).

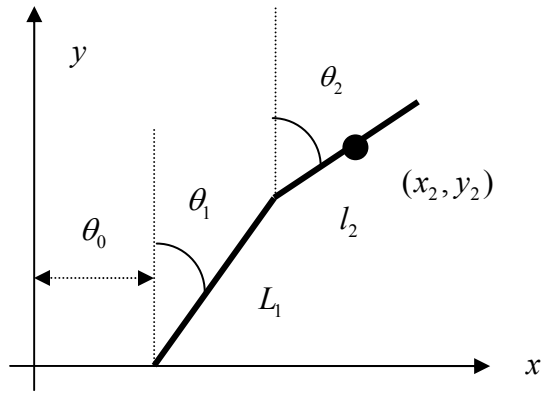

Fig. 3. Coordonatele (x_2, y_2).

Cu acestea energia cinetică a sistemului se scrie ca suma energiilor cinetice ale căruciorului T_0, şi energiile cinetice ale celor două brațe T_1 şi T_2, unde

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2,$$
$$T_1 = \frac{1}{2} m_1[(\dot{\theta}_0 + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1)^2] + \frac{1}{2} I_1\dot{\theta}_1^2$$
$$= \frac{1}{2} m_1\dot{\theta}_0^2 + m_1 l_1 \dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + I_1),$$
$$T_2 = \frac{1}{2} m_2[(\dot{\theta}_0 + L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2] + \frac{1}{2} I_2\dot{\theta}_2^2$$
$$= \frac{1}{2} m_2\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 (m_2 l_2^2 + I_2) + \frac{1}{2} m_2 L_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 L_1 \cos\theta_1 + m_2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2$$
$$+ m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Analog energia potențială a sistemului se scrie ca suma energiilor potențiale ale căruciorului V_0 şi energiile potențiale ale brațelor V_1 şi V_2, unde

$$V_0 = 0,$$
$$V_1 = m_1 g l_1 \cos\theta_1,$$
$$V_2 = m_2 g (L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2).$$

Deci Lagrangeanul sistemului este

$$L = (T_0 + T_1 + T_2) - (V_0 + V_1 + V_2)$$

$$= \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l_2^2 + I_2)\dot{\theta}_2^2$$
$$+(m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$-(m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos\theta_1 - m_2 l_2 g \cos\theta_2.$$

Ecuațiile Lagrange sunt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} &= u, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Explicit obținem

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin\theta_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 g \sin\theta_2,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = (m_0 + m_1 + m_2)\dot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\dot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_0 \cos\theta_1 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2 l_2^2 + I_2)\dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \dot{\theta}_0 \cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0}\right) = (m_0 + m_1 + m_2)\ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - (m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1$$
$$+m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\ddot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_0 \cos\theta_1 - (m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$
$$+m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = (m_2 l_2^2 + I_2)\ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_0 \cos\theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$
$$+m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

Introducând aceste expresii în (1) obținem ecuațiile de mişcare ale pendulului invers dublu pe un cărucior antrenat de o forță u:

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - (m_1 l_1 + m_2 L_1)\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1$$

$$+m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 = u\,,$$

$$(m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_0 \cos\theta_1 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin\theta_1 = 0,$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_0 \cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_2 l_2^2 + I_2)\ddot{\theta}_2$$
$$-m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 g \sin\theta_2 = 0.$$

Introducem următorii parametri agregați ai sistemului:

$$p_1 = m_0 + m_1 + m_2,$$
$$p_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1,$$
$$p_3 = m_2 l_2,$$
$$p_4 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1,$$
$$p_5 = m_2 L_1 l_2,$$
$$p_6 = m_2 l_2^2 + I_2.$$

Atunci, ecuațiile de mişcare a pendulului invers dublu devin

$$p_1 \ddot{\theta}_0 + p_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - p_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + p_3 \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - p_3 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 = u,$$
$$p_2 \ddot{\theta}_0 \cos\theta_1 + p_4 \ddot{\theta}_1 + p_5 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + p_5 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - p_2 g \sin\theta_1 = 0,$$
$$p_3 \ddot{\theta}_0 \cos\theta_2 + p_5 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + p_6 \ddot{\theta}_2 - p_5 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - p_3 g \sin\theta_2 = 0.$$

În formă matriceală Ecuațiile de mişcare se pot scrie sub forma:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = Qu\,,$$

unde $\theta = [\theta_0, \theta_1, \theta_2]^T$ este vectorul coordonatelor generalizate şi

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \cos\theta_1 & p_3 \cos\theta_2 \\ p_2 \cos\theta_1 & p_4 & p_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ p_3 \cos\theta_2 & p_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & p_6 \end{bmatrix}$$

este *matricea de inerție*, simetrică şi pozitiv definită,

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 & -p_3 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & p_5 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & -p_5 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix}$$

este *matricea Coriolis*,

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_2 g \sin\theta_1 \\ -p_3 g \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

este *vectorul forțelor conservative* şi $Q = [1, 0, 0]^T$.

Deoarece matricea $M(\theta)$ este inversabilă ecuațiile de mişcare se pot scrie sub forma

$$\ddot{\theta} + M(\theta)^{-1} C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + M(\theta)^{-1} G(\theta) = M(\theta)^{-1} Qu \ .$$

Introducând variabila

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \in R^6$$

atunci ecuaţiile de mişcare se scriu sub forma canonică

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & -M^{-1}C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}Q \end{bmatrix} u,$$

unde I_3 este matricea identitate de ordinul 3.

January 11, 2010