Probleme Fundamentale

Rezumat. Lucrarea prezintă problemele matematice formulate de David Hilbert la Congresul Internațional de Matematică de la Paris din 1900 împreună cu câteva detalii. În continuare se prezintă lista lui Landau şi apoi a lui Smale. Se arată că după 100 de ani, în lista lui Smale se regăsesc multe din problemele formulate de Hilbert. Ceea ce caracterizează lista lui Smale este faptul că toate problemele formulate de acesta sunt legate de *teoria computabilității*, care stabileşte ***ceea ce putem calcula, cum*** şi ***cu ce efort***. Aceasta precizează rolul informaticii ca un capitol special al matematicii care are ca obiect fundamental de studiu algoritmizarea conceptelor matematice, studiul convergenței şi a complexității computaționale, prelungirea analizei conceptelor matematice din punctul de vedere al puterii lor computaționale.

Fiecare domeniu de activitate are la bază o metaforă[1] fondatoare şi este caracterizat de o serie de probleme care pot fi considerate drept *probleme fundamentale.* În general, prin problemă ($\pi\rho o\beta\lambda\eta\mu\alpha$) înțelegem „*ceva ce avem mereu în față, şi cu care suntem confruntați*". Întotdeauna o problemă ne plasează într-o stare pe care o putem numi problematică. Adică acea stare de tensiune intelectuală prin care suntem chemați să depăşim situația cu care trebuie să facem față. Este vorba deci de o instabilitate sau derută cognitivă care cere unui organism (viu sau artificial - care întotdeauna este matematic) efectuarea unui efort de modificare a stării curente în sensul depăşirii stării problematice create de o situație, de cele mai multe ori nedorită, dată. Altfel spus, în esența ei, *o problemă este o întrebare fie de natură rațională, speculativă sau teoretică, fie de natură practică, netrivială, adică greu de rezolvat, care în urma soluționării ne conduce la răspunsuri cu valoare adăugată, nu direct intuibile*. Problemele provin din două surse principale. Prima o constituie perturbațiile cu care mediul înconjurător acționează asupra noastră. A doua este dată de procesul cognitiv veritabil în care ne plasăm pentru a ne ameliora înțelegerea funcționării creației.

Problemele fundamentale ale unui domeniu rezultă direct din obiectul domeniului, ca urmare a unei înțelegeri profunde a fenomenelor proprii domeniului respectiv. Ceea ce dă maturitate unui domeniu este gradul lui de formalizare. În acest context putem spune că *matematica este un univers de discurs translatat în*

[1]*Metaphora*, care vine din limba greacă şi înseamnă *deplasare,* este o figură de stil prin care se realizează trecerea de la semnificația obişnuită, cunoscută, a unui cuvânt sau a unei expresii, la o altă semnificație pe care cuvântul sau expresia respectivă o primeşte în scopul obținerii unei comparații. Metafora realizează un transfer brusc între doi termeni prin care alături de primul înțeles, comun, apar o multitudine de alte sensuri sugerate. Evident acestea sunt conştientizate în funcție de subtilitatea şi cultura cititorului.

limbaj simbolic. Matematica este limbajul natural al ştiinţei, fundamentul încercării oamenilor de a înţelege lumea înconjurătoare. În acest context cred că înţelegerea se construieşte pe straturi de abstractizare. Cele mai stabile straturi sunt cele care se află cel mai aproape de faptele observabile. Cele mai instabile sunt cele de la graniţa cunoaşterii. Pentru unele domenii de activitate definirea problemelor fundamentale este o sarcină foarte grea. În definirea problemelor fundamentale, pe lângă obiectul de activitate al domeniului trebuie avute în vedere o serie de alte aspecte legate de gradul de cultură, tradiţii, formalizarea domeniului, experienţa trăită a naturii etc.

De exemplu, la întrebarea „*care este problema fundamentală a omului?“,* cred că răspunsul ar fi „*problema salvării sau a eliberării - ataraxia“*. Au fost oameni care au rezolvat această problemă ? Cred că sfinţii şi adevăraţii oameni de ştiinţă au atins cu adevărat această stare. Atingerea stării de *ataraxie – αταραξιε –, de seninătate*, este o mare provocare şi constituie una dintre marile căutări ale spiritelor cultivate. Pentru aceste spirite nu există nimic mai important decât *sophia*, adică ceea ce se poate traduce prin *înţelepciune*. Pitagora se pare că a fost primul care a întrebuinţat acest termen când spune „*sophos“ nu este decât zeul, pe când omul nu poate fi altceva decât un „philosophos“*, adică un iubitor de înţelepciune. Aşadar, atingerea stării de *sophos* sau de *zeu*, aşa după cum ne recomandă şi Socrate în discuţia lui cu atenienii, înseamnă realizarea „*stării de perfecţiune“*, a unei stări divine în acord cu o vorbă a lui Heraclit, anume „*locul zeului este în om*”.

Dezvoltarea ştiinţei şi a tehnologiei, pe de-o parte şi a matematicii cu toate ramurile ei, pe de altă parte, au determinat apariţia şi consolidarea unui număr foarte mare de domenii care au obiecte de activitate foarte bine definite şi individualizate, şi care utilizează concepte şi instrumente matematice avansate bine particularizate. Este foarte greu de a se prezenta toate domeniile de activitate împreună cu problemele lor fundamentale. Totuşi, în cele ce urmează vom încerca să prezentăm o listă a câtorva domenii şi problemele lor fundamentale. Lista este discutabilă şi cu această ocazie invităm cititorul să mediteze asupra acestei chestiuni în sensul dezvoltării şi completării ei.

- *Aerodinamica*: Determinarea mişcării fluidelor, şi în general a gazelor, precum şi aceea a mişcării corpurilor într-un mediu gazos.
- *Alchimie*: Transmutaţia elementelor către aur.
- *Algebra*: Rezolvarea ecuaţiilor polinomiale cu coeficienţi numere complexe.
- *Algebra numerică liniară*: Rezolvarea sistemelor algebrice liniare; Calculul valorilor proprii; Descompunerea valorilor singulare; Cele mai mici pătrate.
- *Analiza numerică*: Studiul algoritmilor pentru rezolvarea problemelor matematice continue (cu variabile reale sau complexe).
- *Antropologie*: Originea, evoluţia şi variabilitatea biologică a omului; Influenţa condiţiilor naturale şi social-culturale asupra omului.
- *Aritmetica:* Descompunerea numerelor naturale ca un produs de numere prime.
- *Astrologie*: Determinarea viitorului pe baza poziţiei şi mişcării aştrilor, a constelaţiilor sau a unor fenomene cereşti.
- *Astronomie*: Originea, natura şi mişcarea astrelor, a sistemelor de aştri, a galaxiilor şi a

universului. Existenţa lumilor extraterestre.

- *Biologie*: Răspunsul la întrebarea: *ce este viaţa* ?
- *Cosmologie*: Alcătuirea, originea, evoluţia şi scopul universului.
- *Economie*: Alocarea resurselor.
- *Estetică*: Originea, natura şi valoarea frumosului ca existenţă în sine sau ca manifestare.
- *Filosofie*: Răspunsul la întrebarea: τι τň öν – *ti to on – ce este fiinţa* ?
- *Fundamentele matematicii*: Care este natura noţiunilor considerate în matematică, în ce măsură acestea au fost construite de oameni, în ce măsură ele au fost impuse din exterior şi de unde le cunoaştem proprietăţile. Care este natura demonstraţiilor matematice şi care sunt criteriile care ne permit să deosebim demonstraţiile adevărate de cele false.
- *Geologie*: Originea, natura şi structura Pământului împreună cu transformările suferite în timp.
- *Identificarea sistemelor*: Cele mai mici pătrate parţială; Separarea semnalelor prin utilizarea tehnicilor de identificare; Identificarea sistemelor slab excitate; Identificarea sistemelor în buclă închisă; Identificarea sistemelor neliniare; Identificarea sistemelor din măsurători afectate de zgomot.
- *Informatică*: Coborârea în computaţional a conceptelor matematice.
- *Logică*: Aflarea şi explicarea adevărului, realizat în toate obiectele gândirii.
- *Logica matematică*: Care este mecanismul logico-matematic al deducţiei şi ce îl justifică. Determinarea unui procedeu care să permită întotdeauna să recunoaştem dacă o propoziţie este adevărată sau falsă într-o teorie.
- *Macroeconomie*: Înţelegerea modalităţilor de interacţiune a celor trei categorii de pieţe: piaţa bunurilor şi serviciilor, piaţa monetară şi piaţa muncii, precum şi determinarea producţiei şi a gradului de ocupare a forţei de muncă. Alocarea resurselor între agregatele economice. Rezolvarea şomajului şi a inflaţiei.
- *Microeconomie*: Ce bunuri şi ce servicii se produc şi în ce cantităţi; cum se produc bunurile; cum se distribuie aceste bunuri, cum se stabilesc preţurile bunurilor şi serviciilor.
- *Mecanică*: Stabilirea unor relaţii între forţele care acţionează asupra unui sistem de corpuri materiale şi mişcarea mecanică realizată de aceste corpuri. Sau altfel spus, studiul mişcării şi echilibrului corpurilor materiale, precum şi studiul forţelor care solicită aceste corpuri.
- *Meteorologie*: Predicţia stării şi a schimbării atmosferei pe perioade mari de timp.
- *Teoria ecuaţiilor diferenţiale:* Studiul grupurilor cu un parametru de difeomorfisme ale unei varietăţi, a câmpurilor de vectori definite pe varietate şi a legăturilor dintre aceste câmpuri.
- *Teoria catastrofelor*: Studiul şi clasificarea fenomenelor caracterizate de o schimbare bruscă a comportării lor ca urmare a unor mici schimbări în valoarea şi structura parametrilor asociaţi acestor fenomene.
- *Teoria macroscopică a câmpului electromagnetic*: Determinarea câmpului electromagnetic în diverse medii şi ipoteze. Rezolvarea ecuaţiilor Maxwell-Hertz.
- *Teoria sistemelor*: Studiul matematic al structurilor dinamice complexe.
- *Teoria sistemelor liniare*: Calculul matricelor compensatoarelor; Alocarea polilor; Rejecţia exactă a perturbaţiilor; Decuplare; Invarierea ieşirii; Sinteza exactă.
- *Topologie*: Identificarea acelor proprietăţi ale unor structuri matematice care sunt invariante la deformări continue.
- *Procesarea limbajului natural*: Stabilirea şi recunoaşterea identităţii cuvântului şi a

utilizării lui în context.

1. Probleme Matematice. Lista lui Hilbert


David Hilbert (1862-1943)

La al doilea *Congres Internaţional de Matematică* de la Paris, care a avut loc în 8 august 1900, David Hilbert a prezentat conferinţa invitată: *Probleme matematice*[2]. În această conferinţă Hilbert a articulat 23 de probleme matematice majore care au stimulat gândirea matematică conducând la apariţia şi dezvoltarea unor domenii matematice noi. Probabil că aceasta a fost cea mai influentă conferinţă susţinută de un matematician pentru matematicieni. Totuşi, în esenţa lor acestea nu sunt numai probleme matematice ci probleme de filosofia matematicii şi chiar veritabile probleme filosofice. Unele dintre aceste probleme au fost rezolvate, altele continuă să fie mari provocări.

Problemele lui Hilbert se pot structura în patru clase mari. Prima conţine şase probleme care se referă, în principal, la analiza numerelor reale utilizând teoria mulţimilor a lui Cantor şi un apel la axiomatizarea aritmeticii şi de aici a fizicii. A doua clasă include tot şase probleme asupra teoriei numerelor algebrice, culminând cu generalizarea teoremei lui Kronecker. Cea de-a treia clasă, tot cu şase probleme, se adresează la diferite aspecte ale unor probleme din algebră şi geometrie. Ultima clasă conţine cinci probleme din analiză, incluzând analiticitatea soluţiilor unor probleme şi extinderea calculului variaţional.
În lista de mai jos prezentăm aceste probleme (vezi şi [Bistriceanu şi Stănăşilă, 1996]).

1. *Dacă* $A \subset R$ *este o mulţime infinită, atunci să se arate că există fie o bijecţie* $A \to N$ *, fie o bijecţie* $A \to R$.

   Cu alte cuvinte, problema constă în: există un cardinal strict intermediar între cardinalele mulţimilor N şi R? Aceasta este cunoscută ca problema continuului. în 1963 Paul Cohen a arătat că rezultatul nu se poate obţine din sistemul de axiome Zermelo-Fraenkel al teoriei mulţimilor. Cu alte cuvinte, există o matematică care acceptă ipoteza continuului şi o alta care nu o acceptă, ambele fiind viabile, problema continuului fiind închisă.

   [K. Gödel. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*. Princeton University Press, Princeton, 1940.]
2. *Necontradicţia aritmeticii în* Z. Altfel spus, se poate demonstra că axiomele logicii sunt consistente? Mai precis, din axiomele lui Peano este posibil să se deducă logic

[2] **Mathematical Problems.** Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris în 1900, by Professor David Hilbert, 32 pages.
[http://babbage.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html#final]

atât o afirmaţie cât şi negaţia ei? În 1931 Gödel (1906-1978) a arătat imposibilitatea demonstrării noncontradicţiei aritmeticii prin metode finitiste.

3. *Este sau nu adevărat principiul echipartiţiei pentru tetraedre?*
Problema este dacă două tetraedre cu baze echivalente, în sensul că acestea au aceeaşi arie, şi înălţimi congruente pot sau nu să fie echipartiţionate sau completate prin poliedre congruente. În 1902 Dehn a arătat că există asemenea tetraedre care nu pot fi echipartiţionate. Kagon a obţinut acelaşi rezultat în 1903.
[V. G. Boltianskii. *Hilbert's Third Problem*. Winston, Halsted Press, Washington, New York, 1978.]
[C. H. Sah. *Hilbert's Third Problem*: *Scissors Congruence*. Pitman, London 1979.]
4. *Studiul geometriilor neeuclidiene şi al geodezicelor*. Să se găsească geometrii a căror axiome să fie apropiate de cele ale geometriei euclidiene. Problema a condus la studiul spaţiilor Finsler şi a conexiunilor pe fibraţi.
5. *Studiul grupurilor topologice şi al grupurilor Lie*. Întrebarea era dacă grupurile continue sunt automat diferenţiabile. Problema a condus la degajarea noţiunilor de varietate topologică şi varietate diferenţiabilă.
[Montgomery and Zippin. *Topological Transformation Groups*. Wiley, New York, 1955.]
[Kaplansky. *Lie Algebras and Locally Compact Groups*. Chicago Univ. Press, Chicago, 1971.]
6. *Studiul axiomatic al fizicii*. Se poate axiomatiza fizica? Axiomatizând geometria, în 1899, Hilbert a recomandat extinderea acestei idei şi pentru alte domenii ale matematicii şi ştiinţei. În acest sens s-a reuşit axiomatizarea teoriei probabilităţilor (Kolmogorov, 1933), a mecanicii (Einstein-Minkowski), a termodinamicii (Caratheodory-Bejan), a teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic (Maxwell-Hertz), a mecanicii cuantice (von Neumann). Totuşi, în 1931, Gödel a arătat insuficienţa axiomatizării, demonstrând faptul că în cadrul unui sistem axiomatizat întotdeauna există propoziţii nedecidabile. Altfel spus, matematica şi deci cu atât mai mult Natura, nu se pot reprezenta prin intermediul unui număr (restrâns) de axiome şi legile logice ale lui Aristotel.
[Leo Corry, *Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)* în Archive for History of Exact Sciences, 51 (1997).]
7. *Iraţionalitatea şi transcendenţa anumitor numere*. Fie α un număr algebric diferit de zero şi diferit de unu, şi β un număr iraţional. Atunci numărul α^{β} este transcendent? În 1934 Ghelfond (1906-1968) a arătat că α^{β} este transcendent pentru cazul special în care β este un număr algebric. Problema este deschisă pentru cazul general în care β este iraţional. Hermite (1822-1901) a arătat transcendenţa lui e, iar Lindemann (1852-1939) a arătat transcendenţa lui π. Problema a condus la teoria analitică a numerelor, la studiul fracţiilor continue etc.
[N.I.Feldman. *Hilbert's seventh problem*, Moscow State University 1982, 312pp. MR 85b:11001.]
8. *Să se demonstreze ipoteza lui Riemann* conform căreia funcţia
$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots,$$
funcţia zeta a lui Riemann, are toate zerourile din semiplanul drept $\mathrm{Re}(s)>0$ situate pe dreapta verticală $\mathrm{Re}(s)=1/2$. Utilizând o abordare experimentală,

această ipoteză a fost confirmată prin calculul primelor câtorva milioane de zerouri. Bompieri a arătat că ipoteza are loc cu probabilitatea 1, în raport cu un anumit câmp de evenimente. Problema este importantă, rezolvarea ei permiţând soluţionarea altor probleme ca aceea a lui Goldbach.

9. *Demonstraţia celei mai generale legi a reciprocităţii a lui Gauss*. Un întreg n se numeşte rest pătratic modulo p ($p \geq 3$, p număr prim) dacă n nu este divizibil cu p şi există un întreg m astfel încât $m^2 - n$ este divizibil cu p. În acest context se notează:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{daca n este rest patratic modulo p,} \\ -1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Legea reciprocităţii stabilită de Gauss afirmă că: *pentru orice două numere prime impare* p *şi* q*, este adevărată egalitatea:*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right).$$

10. *Determinarea rezolvabilităţii ecuaţiilor diofantice.* Problema constă în a elabora un algoritm care să determine soluţiile întregi ale unei ecuaţii de forma $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, unde $f(.)$ este un polinom cu coeficienţi întregi. Matiyasevici, matematician american de origină rusă, a rezolvat problema dând un răspuns negativ în 1970.
[S. Chowla. *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem.* Gordon and Breach, New York, 1965.]
[Yu. V. Matiyasevich. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts,1993, vezi: http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/H10Pbook.]

11. *Studiul formelor pătratice cu coeficienţi numere algebrice*. Rezolvarea unei ecuaţii pătratice cu coeficienţi numere algebrice, cu un număr arbitrar de variabile din corpul numerelor fracţionare sau numere întregi.

12. *Generalizarea teoremei lui Kronecker*. (Extensia abeliană maximală a corpului Q este generată de toate rădăcinile unităţii.)
[R.-P. Holzapfel. *The Ball and Some Hilbert Problems.* Springer-Verlag, New York, 1995.]

13. *Imposibilitatea rezolvării ecuaţiei generale de gradul 7 prin sume şi compuneri de funcţii de câte două variabile*. Problema a fost rezolvată în 1957 de Kolmogorov şi Arnold. Aceştia au arătat că dacă $f : K \to R^m$, unde $K \subset R^n$, este o funcţie continuă pe paralelipipedul K, atunci există un număr de $n(2n+1)$ funcţii continue $h_{p,q}$ de câte o singură variabilă $(1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq 2n+1)$, precum şi o funcţie continuă $g : R \to R^m$, astfel încât:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g\left(\sum_{p=1}^{n} h_{p,q}(x_p)\right),$$

pentru orice $(x_1,\ldots,x_n) \in K$.

14. *Demonstrarea finitudinii anumitor* $k-$*algebre.* Problema constă în a arăta dacă subinelul, inelului polinoamelor cu coeficienţi într-un corp comutativ, al polinoamelor invariante la un grup de automorfisme este finit generat. Nagata a dat

un răspuns negativ la această problemă în 1958.
[Masayoshi Nagata. *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.]

15. *Fundamentarea riguroasă a calculului enumerativ al lui Schubert*. Problema este în legătură directă cu studiul varietăților algebrice şi cu schemele lui Grothendieck.
16. *Studiul topologic al curbelor şi suprafețelor algebrice*. Această problemă a condus la elaborarea topologiei varietăților algebrice reale, teoria Morse, studiul singularităților etc.
[Yu. Ilyashenko, and S. Yakovenko, (Editors) *Concerning the Hilbert 16th problem*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1995.]
[B.L.J. Braaksma, G.K. Immink, and M. van der Put, (Editors) *The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th Problem.* World Scientific, London, 1996.]
17. *Exprimarea unor forme raționale cu coeficienți reali, cu valori pozitive, ca sumă de pătrate de funcții raționale.* Problema a fost rezolvată de E. Artin în 1927.
18. *Acoperirea spațiului cu poliedre congruente. Studiul grupurilor cristalografice.* Orice structură cristalină, proprie unei substanțe în fază solidă, are anumite regularități care se pot exprima sub forma unui grup cristalografic (grupul de mişcări ale spațiului care invariază structura cristalului). În 1891 Fedorov şi Schönfliess au demonstrat că în plan există 17 grupuri cristalografice distincte, iar în spațiu 230. Problema a condus la introducerea pseudocristalelor de către Penrose şi la fractali de către Mandelbrot.
19. *Analiticitatea soluțiilor unor probleme variaționale*.
20. *Analiticitatea soluțiilor unor ecuații cu derivate parțiale*.
21. *Existența unor ecuații diferențiale cu grup de monodromie dat.* Să se demonstreze că întotdeauna există un sistem Fuchsian cu singularități şi un grup de monodromie date.
22. *Uniformizarea relațiilor analitice cu ajutorul funcțiilor automorfe*.
23. *Extinderi ale metodelor calculului variațional*.

Problemele lui Hilbert au avut un impact deosebit în comunitatea ştiințifică conducând la apariția şi dezvoltarea unor domenii noi în matematică cu puternice implicații aplicative. Astfel au apărut şi s-au consolidat domeniile: teoria categoriilor şi functorilor, algebra omologică, teoria fascicolelor, analiza pe varietăți şi geometria spațiilor analitice, analiza nonstandard, teoria catastrofelor şi bifurcații, teoria sistemelor dinamice, control optimal, transformata Fourier rapidă, teoria unificată a câmpului, teoria informației, tomografia computerizată, fractali şi haos, procese stocastice, teoria fiabilității etc. Toate acestea se constituie ca instrumente matematice de mare finețe analitică pentru modelarea matematică a creației.

2. Probleme Matematice. Lista lui Landau

În 1912, la Congresul de Matematică de la Cambridge, Landau a propus 4 probleme, cunoscute ca problemele lui Landau:

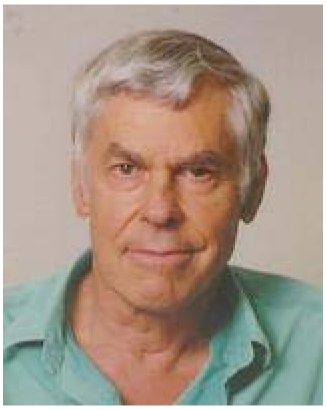
1. *Conjectura lui Goldbach*. Într-o scrisoare din 7 iunie 1742 expediată lui Euler, Goldbach formulează conjectura: „*orice număr mai mare decât 2 este suma a trei numere prime*“. Euler a reformulat conjectura sub forma „*toate numere întregi pozitive*

pare, mai mari decât 4, se pot exprima ca suma a două numere prime".

2. *Conjectura numerelor prime gemene.* Numerele prime gemene sunt perechi de numere prime de forma $(p, p+2)$. De exemplu: (3,5), (5,7), (11,13),... Se conjecturează că sunt o infinitate de perechi de numere prime gemene.
3. *Conjectura că există un număr prim* p *astfel încât* $n^2 < p < (n+1)^2$, *pentru orice* n.
4. *Conjectura că există o infinitate de numere prime* p *de forma* $p = n^2 + 1$.

Mai târziu, în 1945, la Congresul de la Amsterdam, John von Neumann a prezentat o conferinţă similară: „*Probleme nerezolvate de matematică*" cu un impact mai mic asupra comunităţii ştiinţifice decât conferinţa lui Hilbert.

3. Probleme Matematice. Lista lui Smale


Stephen Smale (1930)

La o sută de ani după Hilbert, Steve Smale, răspunzând unui mesaj al lui Arnold, trimis din partea Asociaţiei Internaţionale a Matematicienilor, a propus o listă de 18 probleme, considerate *problemele secolului al XXI-lea* [Smale, 1998, 2000]. Lista lui Smale este în spiritul celei elaborate de Hilbert şi de fapt include câteva din problemele lui Hilbert. Aceasta nu conţine probleme din toate domeniile matematicii. Mai mult, unele probleme nici nu au o formulare matematică precisă. având un caracter descriptiv mai mult filosofic decât matematic. Referitor la aceste probleme, ceea ce este foarte important de menţionat este faptul că din cele 18 probleme, *aproape toate implică fie teoria computabilităţii (a calculului), fie teoria sistemelor dinamice, fie ambele.* Aceasta arată importanţa acordată calculului, adică importanţa acordată coborârii în computaţional a conceptelor matematice. În cele ce urmează să prezentăm pe scurt problemele din lista lui Smale.

1. *Ipoteza lui Riemann. Toate zerourile netriviale ale funcţiei Zeta:*

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

a lui Riemann, se află pe linia critică $\sigma = 1/2$. Aceasta este chiar problema numărul 8 din lista lui Hilbert.

Ipoteza lui Riemann a constituit subiectul a foarte multe lucrări care accentuau atât aspectele teoretice cât şi pe cele computaţionale. Este iteresant de notat că chiar Riemann pe lângă intuiţia cu care a formulat această ipoteză în 1859, a făcut calcule numerice foarte detaliate privind determinarea cu acurateţe a rădăcinilor funcţiei

$\varsigma(s)$. În prezent se cunosc foarte multe încercări de a testa computațional această ipoteză. De exemplu, Brent *et al* (1982) au arătat că ipoteza este adevărată pentru primele 2000000001 zerouri $\sigma + it$ în domeniul $0 < t < 81702130,19.$

În 1914 Hardy a arătat că se pot determina un număr infinit de valori pentru s pentru care $\varsigma(s) = 0$ şi $\mathrm{Re}(s) = 1/2.$ Totuşi, nu se cunoaşte dacă *toate* zerourile netriviale s ale funcției $\varsigma(s)$ satisfac $\mathrm{Re}(s) = 1/2.$ Importanța ipotezei lui Riemann constă în înțelegerea distribuției numerelor prime [Stoilov, 1954].

2. *Conjectura lui Poincaré*. Presupunem că o varietate compactă, conexă din spațiul 3-dimensional are proprietatea că orice cerc de pe aceasta se poate deforma continuu la un punct. Atunci, este această varietate homeomorfă cu o sferă din spațiul 3-dimensional ? Altfel spus, conjectura lui Poincaré zice că sfera este singurul spațiu posibil tri-dimensional mărginit care nu conține găuri. Conjectura a fost propusă de Poincaré în 1904 şi apoi a fost generalizată la varietăți compacte $n-$dimensionale.

$n-$sfera este spațiul

$$\{x \in R^{n+1} : \|x\| = 1\}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

O varietate compactă $n-$dimensională se poate reprezenta ca o suprafață închisă, mărginită $n-$dimensională (diferențiabilă şi nesingulară) din spațiul Euclidian. Conjectura lui Poincaré zice că o varietate compactă $n-$dimensională M cu proprietatea că orice aplicație $f : S^k \to M$, $k < n$ se poate deforma la un punct, trebuie să fie homeomorfă cu S^n. Henri Poincaré a studiat aceste probleme în lucrările lui asupra topologiei. În 1900 a anunțat o demonstrație pentru cazul general $n-$dimensional, dar în 1904 a găsit un contra exemplu. Într-o altă lucrare a dat o demonstrație pentru cazul $n = 3.$ În 1960 Steve Smale a dat un răspuns afirmativ pentru cazul $n > 4,$ iar în 1982 Mike Freedman a demonstrat conjectura pentru $n = 4.$ În 2002 Grigori Perelman a demonstrat conjectura pentru $n = 3.$ Conjectura lui Poincaré a influențat foarte mult matematicile din secolul XX, instituind varietățile ca un obiect de studiu în matematică, incluzând varietăți algebrice, varietăți Riemann etc. precum şi la înțelegerea topologiei pe varietăți.

3. *Are lor egalitatea: $P = NP$?* Adică, problemele polinomiale sunt echivalente cu cele nedeterminist polinomiale ? Aceasta este o problemă fundamentală a informaticii şi se referă la studiul *complexității algoritmilor*. De fapt aceasta reprezintă o chestiune din ştiința calculatoarelor pusă matematicii. La fel ca şi conjectura lui Poincaré care a introdus varietățile ca obiect de studiu în sine, la fel această problemă introduce studiul algoritmilor ca domeniu de studiu separat.

O problemă este *polinomială* (cu timp polinomial) dacă numărul de paşi necesari rezolvării ei este mărginit de un polinom. O problemă este *nedeterminist polinomială* (cu timp nedeterminist polinomial) dacă o soluție ei este verficabilă într-un timp polinomial pe o maşină Turing nedeterministă. (O *maşină Turing* nedeterministă este o maşină Turing „paralelă”, care poate executa în paralel mai multe drumuri computaționale, cu restricția că maşinile Turing nu pot comunica între ele.) O P-problemă (a cărui timp de rezolvare este mărginit de un polinom) este întotdeauna NP. Dacă se cunoaşte că o problemă aparține clasei NP şi se cunoaşte cumva o soluție a ei (de exemplu se ghiceşte), atunci demonstrarea corectitudinii acestei soluții se poate întotdeauna reduce la o verificare în timp polinomial, adică verificarea este o P-problemă. Se zice că o problemă este NP-*grea* dacă un algoritm pentru rezolvarea ei poate fi translatat în unul pentru rezolvarea oricărei alte NP-probleme. Este mult mai uşor să se arate că o problemă este NP decât să se arate că este NP-grea. O problemă care este atât NP cât şi NP-grea se numeşte *problemă NP-completă*.

Smale afirmă că $P \neq NP$ într-o versiune care implică corpul numerelor reale. Problema considerată de Smale este cunoscută ca „*Hilbert Nullstellensatz Problem - HNP*" peste corpul numerelor complexe. Într-adevăr, fie $f_1, \dots, f_k$ polinoame cu coeficienţi numere complexe în n variabile. Problema este de a decide dacă acestea au o rădăcină comună.

4. *Determinarea zerourilor întregi ale unui polinom de o variabilă.* Fie $f \in Z[t]$ un polinom de o variabilă cu coeficienţi întregi. Fie $u_0 = t$, $u_{-1} = 1$, $u_k = f$ şi definim un *program* pentru polinomul $f \in Z[t]$, de o variabilă cu coeficienţi întregi, ca obiectul $(1, t, u_1, \dots, u_k)$, unde pentru toţi m, $u_m = u_i \circ u_j$, $i, j < m$ şi $\circ$ este $+, -$ sau $\times$. Fie $\tau(f)$ minimul după k pe mulţimea programelor astfel definite. Cu acestea problema se poate formula sub forma: *numărul zerourilor întregi distincte ale lui f este mărginit polinomial de $\tau(f)$?* Altfel spus $Z(f) \leq a\tau(f)^c$ *pentru toţi* $f \in Z[t]$ *?,* unde $Z(f)$ este numărul zerourilor întregi distincte ale lui f şi a şi c sunt constante universale. Un răspuns afirmativ la această problemă implică netratabilitatea problemei Nullstellensatz ca o problemă de decizie peste C şi deci $P \neq NP$ peste C [Shub şi Smale, 1995].

5. *Marginile curbelor Diofantice. Se poate decide dacă o ecuaţie diofantină*

$$f(x, y) = 0,$$

unde $f(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ *şi* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2$, *are o soluţie întreagă* (x, y), *în timpul* 2^{s^c} *, unde* s *este mărimea lui* f *, defintă ca* $s(f) = \sum_{|\alpha| \leq d} \max(\log|a_\alpha|, 1)$, *iar* c *este o constantă universală ?*

Problema este foarte delicată, fiind o versiune a unei bine cunoscute probleme din teoria numerelor. Soluţia celei de-a 10 probleme a lui Hilbert, dată de Matiyasevich, arată nedecidabilitatea acestei probleme dacă numărul de variabile nu este limitat. Rămâne totuşi de demonstrat dacă se poate decide că există un număr raţional de soluţii pentru o ecuaţie Diofantică. Ceea ce este relevant aici este noţiunea de clasă NP din teoria complexităţii. O problemă din clasa NP este privită ca una rezolvabilă într-un timp exponenţial.

6. *Finitudinea numărului de puncte de echilibru relativ în mecanica cerească.* În problema $n-$corpurilor din mecanica cerească, pentru orice alegere a maselor $m_1, \dots, m_n$, numere reale pozitive, există un număr finit de puncte de echilibru relativ ? Pentru cazul $n = 3$, problema a fost rezolvată afirmativ de Lagrange şi Euler. Pentru cazul $n = 4$, finitudinea nu este cunoscută.

Mai exact, problema celor $n-$corpuri este studiul dinamicii a n puncte materiale de mase $m_i > 0$ şi poziţii $x_i \in R^n$ care satisfac legile de mişcare ale lui Newton:

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \ , \ 1 \leq j \leq n$$

where r_{ij} este distanța dintre x_i şi x_j. O mişcare de echilibru relativ este o soluție a ecuațiilor de mai sus în R^2 de forma $x_i(t) = R(t)x_i(0)$, unde $R(t)$ este o rotație uniformă cu viteza unghiulară $v \neq 0$ în jurul unui punct $c \in R^2$. O astfel de soluție este posibilă dacă şi numai dacă pozițiile inițiale $x_i(0)$ satisfac ecuațiile algebrice

$$\lambda(x_j - c) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \ , \ 1 \leq j \leq n$$

unde $\lambda = -v^2 < 0$. Centrul de rotație c este centrul de masă a sistemului. O soluție a acestor ecuații se numeşte configurație de echilibru relativ sau încă echilibru relativ. Fiecare echilibru relativ generează o familie de mişcări periodice eliptice. Echilibrul relativ pentru problema cu trei corpuri este bine cunoscut. Până la o simetrie problema are exact cinci echilibre relative. Două dintre acestea sunt triunghiurile echilaterale ale lui Lagrange. Celelalte, sunt trei configurații coliniare descoperite de Euler.

Pentru problema cu patru corpuri situația este deja foarte complexă pentru a avea o clasificare completă a echilibrelor relative. Hampton şi Moeckel [2004] au arătat că dacă masele sunt pozitive, atunci pentru problema cu patru corpuri există numai un număr finit de clase de echivalență de echilibru relativ. Mai precis, ei arată că problema cu patru corpuri admite cel puțin 32 şi cel mult 8472 de clase de echivalență de echilibru relativ, dintre care 12 dintre acestea sunt coliniare. Demonstrația se bazează pe integrarea simbolică a ecuațiilor de mişcare. Este interesant de notat că demonstrația finitudinii pentru această problemă se reduce la a arăta că un sistem de ecuații polinomiale are un număr finit de soluții, astfel încât $r_{ij} \neq 0$ pentru toți $i \neq j$.

7. *Distribuția punctelor pe o 2-sferă*. Fie

$$V_N(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log\left(\frac{1}{\|x_i - x_j\|} \right)$$

unde $x = \{x_1, \ldots, x_N\}$, x_i sunt puncte distincte de pe sfera 2-dimensională $S^2 \subset R^3$, şi $\|x_i - x_j\|$ este distanța în R^3. Dacă notăm cu

$$V_N = min_x V_N(x),$$

atunci se pot găsi punctele $\{x_1, \ldots, x_N\}$, astfel încât:

$$V_N(x) - V_N \leq c \log(N),$$

unde c este o constantă universală ?

Această problemă vine din teoria complexității şi este motivată de problema găsirii unui polinom inițial bun pentru algoritmul homotopiei de realizare a Teoremei Fundamentale a Algebrei.

8. *Introducerea dinamicii în teoriile economice.* Includerea ajustării prețurilor în modelarea matematică a teoriei generale a echilibrului. Există o teorie statică a

preţurilor de echilibru formulată de Walras şi dezvoltată de Pareto, Arrow şi Debreu. Pentru cazul simplu al unei pieţe, preţurile de echilibru se stabilesc din ecuaţia care defineşte egalitatea cererii şi a ofertei. În acest caz dinamica economiei se găseşte foarte simplu. Pentru mai multe pieţe, situaţia este mult mai complexă. Aceasta este de fapt problema centrală a economiei, problema echilibrului.

O ilustrare a unui model (static) economic simplu este cel dat de Arrow-Debrew, în care se consideră determinarea echilibrului unei economii cu doi agenţi economici: producători şi consumatori [Paltsev, 2004]. Consumatorii dispun de forţa de muncă L şi de capitalul K. Consumatorul îşi obţine venitul său din vânzarea forţei sale de muncă. El achiziţionează bunuri şi servicii care au o anumită utilitate pentru el. Presupunem, pentru simplitate, că în economia de care vorbim sunt numai două bunuri: X şi Y. Pe de altă parte, producătorii utilizează forţa de muncă a consumatorilor pentru a produce bunuri şi servicii. Ambele sectoare de producţie X şi Y sunt caracterizate de anumite tehnologii de producţie F şi respectiv G. Problema constă în *a determina preţurile şi cantităţile care maximizează profitul producătorului şi utilitatea consumatorului*. Această problemă se exprimă sub forma unei probleme generale de optimizare:

$$max W(X,Y)$$

referitor la:

$$p_x X + p_y Y = wL + rK,$$
$$X = F(K_x, L_x), \quad Y = G(K_y, L_y),$$
$$L = L_x + L_y, \qquad K = K_x + K_y,$$

unde W este o funcţie de utilitate; p_x şi p_y sunt preţurile bunurilor X şi Y; r este preţul capitalului K; w este preţul forţei de muncă L; K_x şi L_x sunt capitalul şi forţa de muncă utilizate în sectorul care produce bunul X; K_y şi L_y sunt capitalul şi forţa de muncă utilizate în sectorul care produce bunul Y. Deci, problema echilibrului economic se poate rezolva prin optimizarea modelului Arrow-Debreu de mai sus. Totuşi, sunt anumite cazuri cum ar fi prezenţa mai multor bunuri, a taxelor şi impozitelor, a anumitor distorsiuni, în care nu este posibil să rezolvăm problema echilibrului pieţei ca problema de optimizare de mai sus. În 1985 Mathiesen a arătat că modelul de echilibru economic Arrow-Debreu se poate reformula ca o problemă mixtă de complementaritate (MCP) în care apar trei inegalităţi fundamentale: condiţia de profit zero, condiţia de transparenţă a pieţii şi condiţia de balansare a veniturilor. Situaţia prezentată pare foarte simplă, dar când se încearcă punerea ei în practică apar probleme deosebit de complicate chiar şi în acest caz al echilibrului static.

Introducerea dinamicii în echilibrul economic se bazează pe diferite abordări (vezi [Ginsburgh şi Keyzer, 1997]), dar una dintre cele mai utilizate este modelul Ramsey (vezi în acest volum lucrarea: „*Model de creştere economică Ramsey*“). Modelele dinamice au caracteristica de a efectua predicţii în viitor. Dar, un asemenea model ne poate spune ce se întâmplă în viitor numai dacă în economia respectivă nu sunt şocuri, rupturi sau schimbări structurale majore. În plus, trebuie să se facă anumite presupuneri privind rata de creştere economică pe o perioadă de timp, rata de creştere a populaţiei, inflaţia, şomajul, deprecierea monedei etc. Toate aceste presupuneri ne depărtează foarte mult de realitate. Totuşi, atât agenţii economici cât şi factorii politici trebuie să-şi bazeze deciziile lor pe calcule matematice. Deci, modelele dinamice de echilibru sunt instrumente foarte importante în evaluarea politicii economice. Trebuie să conştientizăm că un model static bun este mult mai folositor decât un model dinamic prost, iar modele dinamice bune sunt foarte rare, dacă nu chiar inexistente !

9. *Problema programării liniare. Există, în corpul numerelor reale, un algoritm polinomial în timp, care să decidă fezabilitatea unui sistem de inegalităţi liniare* $Ax \geq b$?

Sistemul $Ax \geq b$ admite la intrare o $m \times n -$ matrice A şi un vector $b \in R^m$ şi problema constă în a afla dacă există un $x \in R^n$ care să verifice inegalităţile liniare ale sistemului. De fapt, aceasta este versiunea ca problemă de decizie a problemei de optimizare: date A, b ca mai sus şi $c \in R^n$ să se decidă dacă

$$max\ c^T x, \text{ referitor la } Ax \geq b$$

există şi dacă da să se calculeze un astfel de x.

Faimosul algoritm simplex, precizat pentru prima dată într-o formă voalată de Poussin (1866-1962) şi Kantorovich (1912-1986) şi algebrizat de Dantzig (1914-2005), furnizează o soluţie la ambele probleme (definite peste corpul numerelor reale). În 1972 Klee şi Minty au construit o problemă simplă de programare liniară (prin deformarea unui cub) pentru care algoritmul simplex are o comportare exponenţială. Borgwardt, Haimovich şi Smale au arătat că în medie algoritmul simplex este polinomial în timp.

Utilizând modelul computaţional dat de maşina Turing şi inspirându-se din lucrările lui Yudin şi Nemirovsky, Leonid Khachiyan (1952-2005) în 1979 a găsit un algoritm polinomial (algoritmul elipsoidului) pentru problema programării liniare. Algoritmul elipsoidului furniza o soluţie cu o margine de complexitate mărginită de $O(n^4 L)$ operaţii, unde L este lungimea în biţi a datelor de intrare. Implementări deosebit de îngrijite şi experimente computaţionale foarte minuţioase au arătat că algoritmul elipsoidului nu are o valoare intrinsecă în sensul rezolvării rapide a problemei. Aceasta a schimbat opinia generală conform căreia dacă avem un algoritm polinomial atunci putem rezolva problema. Pentru a avea o eficienţă computaţională, gradul polinomului de complexitate trebuie să fie mic, de exemplu 2 sau maxim 3.

În 1984, Karmarkar a elaborat o metodă de punct interior care rezolvă problema de programare liniară în $O(nL)$ iteraţii, fiecare dintre acestea necesitând rezolvarea unui sistem liniar în R^n. Complexitatea fiecărei iteraţii este de $O(n^3)$ operaţii, dar utilizând tehnici de reinversare, această margine a fost redusă de Karmarkar la $O(n^{2.5})$ operaţii, aşa încât complexitatea totală a algoritmului de punct interior este de $O(n^{3.5} L)$ operaţii. Nu numai că această margine este mai mică decât cea dată de Khachiyan, dar acesta s-a dovedit a avea performanţe excelente pentru rezolvarea problemelor de mari dimensiuni.

În 1988 Renegar a descris un algoritm de punct interior cu o margine de complexitate de $O(\sqrt{n} L)$ iteraţii, cu o complexitate totală identică cu cea a lui Karmarkar.

Pentru numere raţionale algoritmul elipsoidului este polinomial în timp (în funcţie de mărimea intrării în modelul pe biţi). Ca algoritm peste corpul real, adică într-o aritmetică exactă, algoritmul elipsoidului, în general, nu este finit. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru algoritmii de punct interior.

Facem distincţia clară: algoritmul simplex este un algoritm *finit* peste corpul real şi cel raţional, atât în modelul unei aritmetici exacte cât şi în modelul pe biţi. Algoritmii de punct interior sunt finiţi numai peste corpul raţional în modelul pe biţi şi nu peste corpul numerelor reale.

10. *Lema închiderii. Fie $f: M \to M$ un difeomorfism al unei varietăţi compacte netede M şi x un punct non-mişcător al lui f. Este posibil ca f împreună cu derivatele de ordin r, pentru fiecare r, să fie arbitrar de bine aproximat de un difeomorfism $g: M \to M$ astfel încât x este un punct periodic al lui g ?*

Fie X un spaţiu metric şi $f: X \to X$ o surjecţie continuă. Atunci, un element $x \in X$ este un punct mişcător (rătăcitor) (wandering point) (punct haotic) dacă există o vecinătate U a lui x şi un întreg N astfel încât pentru toţi $n \geq N$, $f^n(U) \cap U = \varnothing$. Dacă x nu este mişcător (non-wandering point), atunci îl numim non-mişcător. Altfel spus, x este non-mişcător dacă pentru orice vecinătate U a lui x există $n \geq 1$ astfel încât $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$. Punctul x este un punct periodic, de perioadă m pentru g, dacă $g^m(x) = x$.

Importanţa lemei închiderii zace în faptul că un răspuns pozitiv ar conduce la o înţelegere profundă în dinamica sistemelor legat de teoria genericităţii, stabilitate şi bifurcaţii. Primul rezultat important în această direcţie a fost dat de Peixoto [1962].

11. *Dinamicile 1-dimensionale sunt în general hiperbolice ? Este posibil ca un polinom T definit peste corpul numerelor complexe să fie aproximat de unul de acelaşi grad cu proprietatea că de-a lungul iteraţiilor orice punct critic tinde la un deversor periodic.*

Problema este nerezolvată chiar pentru polinoame de gradul 2. În această problemă T este o aplicaţie polinomială $T: C \to C$ (C este corpul numerelor complexe) care este considerată ca un sistem dinamic discret. Dacă $z \in C$, atunci *orbita* sa $z = z_0, z_1, z_2, \ldots$ se defineşte ca $z_j = T(z_{j-1})$, iar j se poate interpreta ca variabila timp (discret). Un *punct fix* w al lui T ($T(w) = w$) este un *deversor* dacă derivata $T'(w)$ a lui T în w are valoarea absolută mai mică decât 1. Un *deversor periodic* al lui T de *perioadă* p este un deversor al lui T^p. Un *punct critic* al lui T este un punct în care derivata lui T se anulează. Un punct fix x al unui difeomorfism $T: M \to M$ este *hiperbolic* dacă derivata $DT(x)$ a lui T în x nu are nici o valoare proprie cu valoarea absolută egală cu 1. Dacă x este un punct periodic de perioadă p, atunci x este hiperbolic dacă el este un punct fix hiperbolic al lui T^p. Noţiunea de hiperbolic se extinde în mod natural la mulţimea Ω a punctelor haotice (vezi problema 10). Cu acestea un sistem dinamic $T \in Diff(M)$ este numit hiperbolic dacă punctele periodice sunt dense în Ω şi Ω este hiperbolică. Dinamicele hiperbolice se identifică cu o noţiune foarte tare de stabilitate a sistemelor dinamice numită *stabilitate structurală*.

Problema se poate reformula sub forma echivalentă: *o aplicaţie polinomială $T: C \to C$ se poate aproxima cu una hiperbolică ?* Teoria sistemelor dinamice 1-

dimensionale complexe a început cu lucrările lui Cayley din secolul 19 continuând cu cele ale lui Fatou şi Julia de la începutul secolului trecut. Problema rămâne deschisă ca una fundamentală în dinamicile 1-dimensionale.

12. *Centrele difeomorfismelor. Este posibil ca un difeomorfism definit pe o varietate compactă M în ea însăşi să fie C^r aproximat $(r \geq 1)$ prin $T: M \to M$ care comută numai cu iteraţiile lui ?*

Centralizatorul lui T în grupul difeomorfismelor este $\{T^k : k \in Z\}$. Pentru cazul $\dim M = 1$ problema este rezolvată. Problema este interesantă deoarece furnizează o inţelegere a ceea ce se întâmplă dincolo de hiperbolicitate, unde problemele sunt departe de a fi clarificate.

13. *Problema a 16-a a lui Hilbert. Considerăm ecuaţia diferenţială din R^2:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x, y)$$

unde P şi Q sunt polinoame. Există o margine K a numărului finit de cicluri limită de forma $K \leq d^q$, unde d este maximul gradelor lui P şi Q, iar q este o constantă universală ?

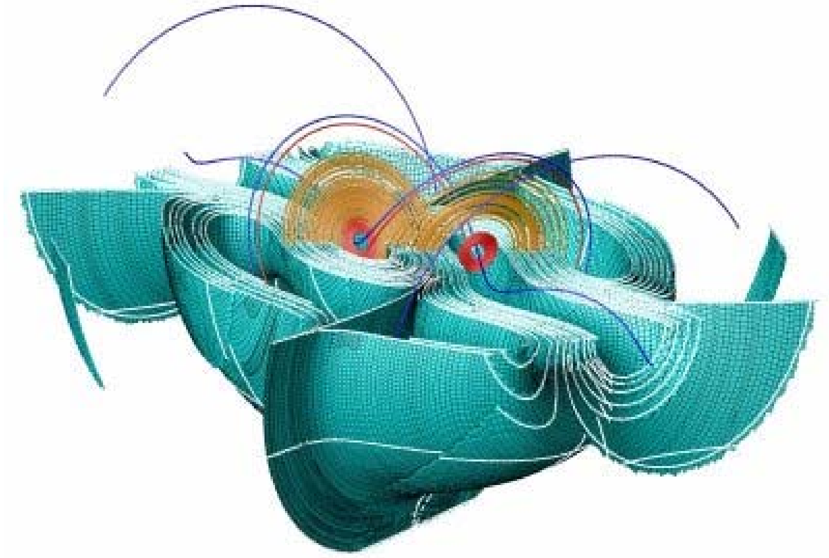
Aceasta este o versiune modernă a părţii a doua a problemei a 16-a a lui Hilbert. Deşi sunt încercări notabile în ceea ce priveşte rezolvarea acestei probleme, lucrările recente trebuie să fie reanalizate pentru a se ajunge la o concluzie definitivă.

14. *Structura soluţiei ecuaţiilor Lorenz este aceea a unui singur atractor ? Altfel formulat, dinamica ecuaţiilor diferenţiale ordinare Lorenz este aceea a atractorului Lorenz al lui Williams, Guckenheimer şi Yorke ?*

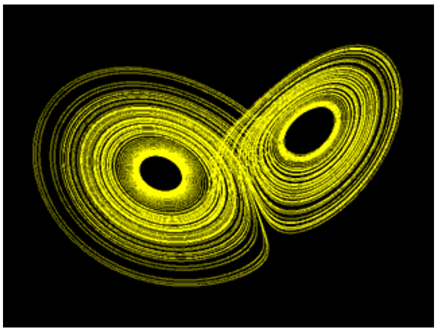
În 1936 Edward Lorentz (1917-2008) a introdus următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

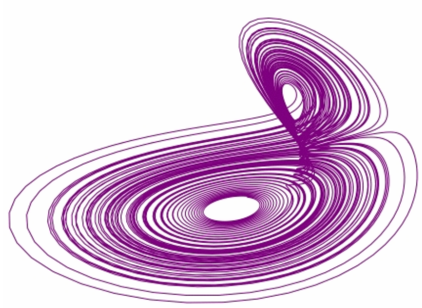
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2, \end{aligned}$$

ca modelul matematic, foarte simplist, al dinamicii atmosferei. σ este cunoscut ca numărul Prandtl, ρ este numărul Rayleigh. Studiind acest sistem, Lorenz a descoperit dependenţa soluţiilor acestuia de condiţiile iniţiale - o proprietate foarte importantă a nepredictibilităţii în reprezentările matematice ale Naturii. Simulări numerice intensive într-o vecinătate (deschisă) a valorilor parametrilor: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ şi $\rho = 28$ impuse de Lorenz au arătat că aproape toate punctele din spaţiul fazelor tind la un singur atractor - *atractorul Lorenz.* În general un atractor este o mulţime în spaţiul variabilelor la care un sistem dinamic tinde după o perioadă de timp destul de lungă. Geometric, un atractor poate fi un punct, o curbă, o varietate sau chiar o mulţime mai complicată cu structură de fractal. În figura de mai jos se arată varietatea şi atractorul Lorenz obţinute de Mike Henderson, în cadrul proiectului *MULTIFARIO: Computing invariant manifolds - COIN-OR*. [Henderson, M., Invariant Manifolds in the Lorenz System, http://www.coin-or.org /multifario /Lorenz.html]. Varietatea Lorenz este mulţimea punctelor din spaţiu care tind la origine, care este un punct de stagnare sau, în realitate, locul unde aerul (atmosfera) este în repaos. Originea întotdeauna este un punct fix. Această mişcare, descrisă de varietate, este complicată, dar mult mai uşor de a se studia decât atractorul, care reprezintă o mişcare foarte complicată.



În figurile de mai jos se arată o proiecţie a atractorului Lorenz, cu aceleaşi valori ale parametrilor care pun în vedere structura acestuia pentru diferite momente de timp. Deşi atractorul apare ca un aranjament a două discuri, totuşi structura lui este mult mai complexă. O asemenea structură cu un nivel infinit de detalii se numeşte *fractal*. Haosul are două caracteristici esenţiale. Prima este dependenţa senzitivă de parametri. Fractalii sunt a doua caracteristică esenţială a haosului.





Un atractor este o mulţime de stări, invariante la dinamica sistemului, către care stările vecine dintr-un bazin de atracţie tind asimptotic în cursul evoluţiei sistemului. Un atractor se defineşte ca cea mai mică mulţime cu această proprietate care nu se poate descompune în doi sau mai mulţi atractori cu bazine de atracţie distincte. Sistemele dinamice au mai mulţi atractori, fiecare cu propriul lui bazin de atracţie. Atractorul Lorenz este un atractor care apare în sistemul de ecuaţii simplificate care descriu curgerea în două dimensiuni a unui fluid. Din întâmplare, în 1960, Lorenz a descoperit *comportarea haotică* a acestui sistem de ecuaţii diferenţiale. În 2002, W. Tucker [2002] (Cornell University) a rezolvat în mod afirmativ această problemă.
Problema este foarte importantă deoarece stabileşte fundamentele pentru aplicaţiile sistemelor dinamice haotice. Până în prezent în ecuaţiile fizicii matematice, din fizică şi inginerie, haosul apare numai într-un sens foarte restrâns. Pe de altă parte, o

situație paradoxală apare în acumularea erorilor de rotunjire. În studiul computațional al ecuațiilor diferențiale haotice erorile de rotunjire cresc exponențial prin chiar proprietatea fundamentală a haosului.

O altă problemă legată de aceasta este următoarea: *se poate decide dacă un sistem dat este haotic ? Există un algoritm care admițând la intrare coeficienții unui sistem dinamic poate stabili dacă sistemul este sau nu haotic ?*

15. *Ecuațiile Navier-Stokes. Au ecuațiile Navier-Stokes, dintr-un domeniu* $\Omega \subset R^3$ *, o soluție unică netedă pentru orice* t *?*

Probabil aceasta este cea mai celebră problemă din teoria ecuațiilor diferențiale. Ecuațiile Navier-Stokes se pot scrie sub forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + grad\; p = 0, \qquad div\, u = 0,$$

unde funcțiile de clasă C^∞ $u: R_+ \times \Omega \to R^3$ şi $p: \Omega \to R$ sunt necunoscutele problemei care trebuie determinate să satisfacă aceste ecuații, în care u este specificat la momentul $t = 0$ şi pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului Ω. Aici, $R_+ = [0,\infty)$, $u.\nabla = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ şi ν este o constantă pozitivă. Problema a fost intensiv studiată şi s-a dat un răspuns pozitiv atât în spațiul cu 2 dimensiuni, cât şi în cel cu 3, dar pentru t în intervale $[0,T]$ mici.

Importanța problemei rezidă în faptul că soluția ei furnizează o înțelegere a problemelor de turbulență şi combustie, a atractorilor haotici în aceste fenomene fizice.

16. *Conjectura Jacobianului. Presupunem că* $f: C^n \to C^n$ *este o aplicație polinomială cu proprietatea că derivata ei în orice punct este nesingulară. Atunci este* f *injectivă ?*

În acest caz C^n este spațiul complex $n-$dimensional şi $f(z) = (f_1(z),\dots,f_n(z))$, unde fiecare f_i este un polinom în n variabile. Derivata lui f în z, $Df(z): C^n \to C^n$ este o matrice de derivate parțiale, iar condiția de nesingularitate este $\det Df(z) \neq 0$. Dacă f este injectivă, atunci ea este surjectivă şi are o inversă care este o aplicație polinomială. Demonstrarea suficienței este o problemă deschisă încă din 1939.

17. *Rezolvarea ecuațiilor polinomiale. Este posibil ca utilizând un algoritm uniform, să determinăm cu aproximație un zero pentru un sistem de* n *ecuații polinomiale în* n *necunoscute într-un timp polinomial ?*

Altfel spus, problema încearcă să facă o distincție clară între *tratabil* şi *netratabil*, în domeniul rezolvării sistemelor de ecuații algebrice polinomiale. Câteva precizări sunt necesare. Considerăm $f: C^n \to C^n$, $f(z) = (f_1(z),\dots,f_n(z))$, unde $z \in C^n$ şi fiecare f_i este un polinom în n variabile de grad d_i. În această problemă, motivat de rezultatele lui Abel şi Galois, prin soluție aproximativă înțelegem o soluție determinată prin algoritmul Newton. Timpul de calcul este măsurat prin numărul de operații aritmetice şi comparații în corpul numerelor reale. Problema este de a găsi un algoritm uniform, adică independent de gradul polinoamelor f_i, care să furnizeze o soluție într-un timp mediu de calcul mărginit de un polinom definit de mărimea intrării, adică de numărul de coeficienți ai funcției f. Problema determinării zerourilor unui polinom sau a unui sistem de ecuații polinomiale este foarte veche şi constituie problema centrală în foarte multe domenii. Aici suntem interesați de a vedea dacă, în condițiile specificate, problema se poate rezolva eficient şi sistematic pe calculatoare.

18. *Care sunt limitele inteligenței, umane sau artificiale ?* Acest proiect cere dezvoltarea unui model matematic al inteligenței, care să ia în considerație diferitele tipuri de inteligență. Definirea inteligenței artificiale nu este simplă şi nu există o convergență de opinii în acest sens. Se poate spune că inteligența artificială este ştiința şi ingineria de a face maşinile inteligente, în special programele de calcul. Altfel spus, inteligența artificială este acea parte computațională a abilității (unei maşini) de a realiza anumite scopuri. Dificultatea aici constă în lipsa unei caracterizări (matematice) a procedurilor computaționale pe care le putem numi inteligente. O parte importantă a unei activități inteligente este „*rezolvarea problemelor*“. Pe lângă aceasta există şi problema „*complexității calculelor*“, o altă față a inteligenței (artificiale sau umane). Un alt aspect care trebuie introdus în modelul inteligenței este acela al „*învățării*“ etc.

Câteva comentarii sunt necesare.

La cererea lui Arnold, Steve Smale, unul dintre cei mai respectabili matematicieni ai timpului nostru, laureat al premiului Fields pe anul 1966, prezintă o listă foarte personală de probleme matematice pentru secolul al XXI-lea. La o privire de ansamblu, problemele lui Smale se pot clasifica în *două mari clase*. Prima conține *probleme formalizate matematic*, precis definite. A doua clasă include *probleme mai puțin formalizate* sau cu un *caracter foarte descriptiv*. Problema 18 este remarcabilă în această clasă.

O analiză atentă a problemelor formalizate ne arată că majoritatea dintre ele se referă la determinarea soluțiilor unor obiecte matematice din punctul de vedere al calculului numeric al acestora. *Aceasta este deosebirea fundamentală dintre abordarea lui Hilbert când acesta şi-a construit lista sa la începutul secolului al XX-lea şi abordarea lui Smale când a articulat cele 18 probleme ale sale la sfârşitul secolului al XX-lea.* Pe timpul lui Hilbert interesul era mai mult către existența soluțiilor, altfel spus se punea accentul pe dezvoltările teoretice care puteau conduce la rezolvarea problemelor (în sens afirmativ sau negativ), față de Smale care insistă asupra computabilității soluțiilor. Hilbert trăia sub **primatul matematicii**. Diferența de abordare este enormă şi arată noua poziție a oamenilor de ştiință, determinată de informatică definită ca activitate de mare intelectualism în ceea ce priveşte *coborârea în computațional a conceptelor matematice*, de reîntoarcere la **primatul existenței**. Într-un sens foarte general, Smale se încadrează în atitudinea lui Leibniz, ambii fiind interesați în modul cel mai profund cu putință de **calcul**. Multe din problemele lui Smale sunt foarte vechi. De exemplu problema 4 de *determinare a zerourilor întregi a unui polinom*, sau problem 5 privind *Marginile curbelor Diofantice*, problema 9 a *programării liniare*, problema 17 a *rezolvării ecuațiilor polinomiale* sunt probleme care au preocupat comunitatea ştiințifică de foarte mult timp. Totuşi, *noutatea în cazul acestor probleme o* *constituie impunerea cerinței de determinare a soluției cu ajutorul unui algoritm polinomial*. Aceasta ridică problema organizării şi studiul *complexității algoritmilor - o problemă fundamentală a informaticii*. Alte probleme cum ar fi problema 10 *lema închiderii*, problema 11 privind *dinamicile 1-dimensionale* sau 12 privitor la *centrele difeomorfismelor* se referă la aproximarea soluțiilor tot din punct de vedere computațional. La fel şi problemele 1 privind *ipoteza lui Riemann*, 14 *structura soluțiilor ecuațiilor Lorenz* şi 15 *ecuațiile Navier-Stokes* implică utilizarea unei matematici computaționale care se speră să furnizeze unele înțelegeri ale fundamentelor reprezentării în simboluri matematice a creației.

Observăm că toate aceste probleme sunt legate de *teoria computabilității*, care stabileşte ***ceea ce putem calcula, cum*** şi ***cu ce efort***. Teoria clasică a calculabilității, aşa cum a fost stabilită de Alan Turing (1912-1954) a furnizat rezultate excepționale în stabilirea fundamentelor şi a cadrului teoretic a ştiinței calculatoarelor. Totuşi, dependența acesteia de „0” şi „1” fundamental este neadecvată stabilirii unei baze pentru calculele ştiințifice, în care cei mai mulți algoritmi - bazați pe ideile lui Newton, Euler, Gauss şi alții - sunt algoritmi care lucrează cu numere reale. În 1989 Shub, Smale şi Blum au introdus o teorie a calculabilității şi a complexității peste inele sau câmpuri arbitrare R. Dacă $R = Z_2 = \{0,1\}$, atunci noua teorie se reduce la teoria clasică a ştiinței calculatoarelor. Dacă R este câmpul numerelor reale, atunci algoritmul Newton - paradigma algoritmilor de analiză numerică - se încadrează în noul model de calcul. Clasele de complexitate P, NP şi problema fundamentală $P = NP$? (problema 3 din lista lui Smale) pot fi reformulate în mod natural peste inelul arbitrar R. Răspunsul la problema fundamentală $P = NP$? depinde de complexitatea deciziei admisibilității sistemelor de polinoame definite peste R (problema 17 din lista lui Smale). Când $R = Z_2$ atunci aceasta devine problema clasică a satisfiabilității a lui Cook-Karp-Levin (*problema SAT*). Când R este corpul numerelor complexe, răspunsul depinde de complexitatea problemei a 10-a din lista lui Hilbert (*Nullstellensatz Problem*).

4. Problemele Mileniului. Clay Mathematics Institute

Clay Mathematics Institute[3], Cambridge, Massachusetts, USA, a formulat (selectat) un număr de 7 probleme considerate *problemele mileniului*. Câteva dintre acestea sunt luate din lista lui Hilbert. Consiliul ştiințific al acestui institut a selectat aceste probleme luând în considerație faptul important că acestea au rezistat de-a lungul anilor. Pentru fiecare dintre acestea Institutul a alocat un premiu în valoare de un milion de dolari. Dintre aceste 7 probleme, *conjectura lui Poincaré* a fost rezolvată de Grigori Perelman, în 2002.

1. *Conjectura lui Birch şi Swinnerton-Dyer*. Aceasta este a 10-a problemă din lista lui Hilbert pentru care Matiasevici a dat un răspuns negativ. Totuşi în anumite cazuri

[3]**Clay Mathematics Institute**, http://www.claymath.org/index.html

speciale se pot spune mai multe despre această problemă. Când soluţiile sunt puncte de pe o varietate abeliană, atunci conjectura Birch şi Swinnerton-Dyer afirmă că mărimea grupului punctelor raţionale este legată de comportarea funcţiei $\zeta(s)$ a lui Riemann lângă punctul $s=1.$ În particular, conjectura afirmă că dacă $\zeta(1)=0,$ atunci există un număr infinit de soluţii raţionale, şi invers dacă $\zeta(1)\neq 0,$ atunci există numai un număr finit de astfel de soluţii.

2. *Conjectura lui Hodge*. Pe o varietate algebrică proiectivă nesingulară definită pe C, orice clasă Hodge este o combinaţie liniară raţională de clase de cicluri algebrice.
3. *Rezolvarea ecuaţiilor Navier-Stokes*. Ecuaţiile Navier-Stokes descriu curgerea fluidelor în R^n unde $n=2$ sau $3.$ Problema constă în a decide dacă sau nu aceste ecuaţii au soluţii netede, fizic realizabile în R^3 sau R^3/Z^3.
4. *P versus NP*. Una dinte cele mai provocatoare probleme din ştiinţa calculatoarelor este de a determina dacă *P=NP*. *P* este clasa problemelor de decizie rezolvabile de un algoritm într-un număr de iteraţii care este mărginit superior de un polinom în lungimea intrării asociate problemei. *NP* este clasa problemelor de decizie care admit un algoritm polinomial nedeterminist, adică un algoritm care verifică corectitudinea unei soluţii a problemei în timp polinomial.
   Problema este foarte importantă, fiind una dintre problemele secolului al XXI-lea, deoarece se plasează la fundamentul informaticii. Esenţa informaticii este coborârea în computaţional a conceptelor matematice, coborâre care constă în algoritmizarea acestor concepte, punerea lor în operă. Ca atare, construcţia algoritmilor polinomiali este esenţială pentru rezolvarea problemelor formalizate.
5. *Conjectura lui Poincaré*. În 1904 Henri Poincaré a formulat următoarea problemă. Considerăm o varietate compactă în R^3 fără frontieră (nemărginită). Este posibil ca grupul fundamental al acestei varietăţi să fie trivial, chiar dacă varietatea nu este homeomorfă cu sfera din R^3 ? Altfel spus, *o varietate simplu conexă din spaţiul cu* $n+1$ *dimensiuni este homeomorfă cu o sferă* $n-$*dimensională* ? Ideea este următoarea. Dacă avem o anumită suprafaţă simplu conexă, adică fără găuri, atunci aceasta se poate deforma continuu până când va lua suprafaţa unei sfere. Notăm că din punct de vedere topologic un elipsoid mărginit este o sferă, iar suprafaţa unei sfere tridimensionale este bidimensională. Acest enunţ matematic, conjecturat de Poincaré în 1904, nu şi-a găsit demonstraţia până în 2002. Pentru cazul $n=4$ demonstraţia a fost precizată de Freedman [1982]. Mai mult, pentru cazul mai general $n>4$ demonstraţia a fost dată de Zeeman [1962] Stallings [1960] şi Smale [1960]. Totuşi pentru cazul $n=3$ nu se cunoştea o demonstraţie. Pentru acest caz William Thurston (Princeton) şi Richard Hamilton (Cornell) au precizat câteva demonstraţii asupra acestei conjecturi şi a generalizării ei, cunoscută ca „conjectura geometrizării”, fără a epuiza subiectul. Problema era că pe măsură ce suprafaţa simplu conexă se deformează în mod continuu, în timp este foarte posibil ca să apară anumite singularităţi, astfel încât nu orice punct al suprafeţei ajunge pe suprafaţa sferei (sfera în sens larg topologic). În 2002 Perelman (Sankt Petersburg) închide această problemă prin precizarea unei proceduri prin care singularităţile pot fi făcute să dispară. În esenţă Perelman indică o chirurgie prin care mărimile care sunt utilizate în definirea deformării sunt netezite. Perelman nu a dat o demonstraţie completă a conjecturii, ci a schiţat un schelet de demonstraţie pe 39 de pagini [2002], completată în [2003a, 2003b]. Demonstraţia completă a fost realizată de

Huai-Dong Cao şi Xi-Ping Zhu [2006]. Pentru rezultatul său, lui Perelman i s-a oferit medalia Fields pe care a refuzat-o. Mai mult, acesta a refuzat şi premiul de un milion de dolari al Clay Mathematics Institute.

6. *Ipoteza lui Riemann*. Aceasta este a 8-a problemă din lista lui Hilbert. Distribuţia numerelor prime în mulţimea numerelor naturale este foarte neregulată, dar Riemann a observat că frecvenţa numerelor prime este intim legată de comportarea funcţiei $\zeta(s)$, numită funcţia Zeta a lui Riemann. Ipoteza lui Riemann este că toate soluţiile netriviale ale ecuaţiei $\zeta(s) = 0$ au partea reală egală cu 1/2. Matematicianul italian Bombieri a arătat că, în raport cu un anumit câmp de probabilitate, ipoteza lui Riemann are loc cu probabilitatea 1.
7. *Teoria cuantică a lui Yang-Mills.* Yang şi Mills au introdus un cadru remarcabil pentru a descrie particulele elementare utilizând structuri care apar în geometrie. Teoria lor constituie fundamentul multor dezvoltări teoretice din fizica particulelor elementare şi predicţiile acestei teorii au fost testate cu succes. Problema este de a fundamenta matematic această teorie.

Bibliografie

Arrow, K.J. and Debreu, G., (1954) *Existence of an equilibrium for a competitive economy.* Econometrica, 22, 265-290, 1954.

Bistriceanu, E.Gh. şi Stănăşilă, O., (1996) Matematică şi Realitate (... Probleme deschise/închise, haos, tomografie, undine). Editura MATRIXROM, Bucureşti, 1996.

Blum, L., Cucker, F., Shub, M. and S. Smale (1997) *Complexity and real computation*. Springer Verlag, 1997.

Brent, R.P., van de Lune, J., te Riele, H.J.J. and Winter, D.T., (1982) *On the zeros of the Riemann Zeta Function in the critical strip II.* Math. Copmput., 39, 681-688, 1982.

Deshouillers, J.M., te Riele, H.J. and Saouter, Y., (1998) *New experimental results concerning the Goldbach conjecture*. In "Proc. 3rd Int. Symp. on Algorithmic Number Theory," Lecture Notes in Computer Science volume 1423, pp. 204--215, 1998.

Freedman, M.H., (1982) *The topology of four-differentiable manifolds,* J. Diff. Geom., 17 (1982), pp.357-453.

Ginsburgh, V. and Keyzer, M., (1997) *The structure of applied general equilibrium models.* The MIT Press, 1997.

Granville, A., te Riele, H.J.J. and van de Lune, J., (1989) *Checking the Goldbach conjecture on a vector computer in Number theory and its applications*. R. A. Mollin editor, Kluwer, Dordrect, pp. 423--433, 1989.

David Hilbert (1900) *Mathematische Probleme.* Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 253-297, 1900.

Hampton, M. and Moeckel, R., (2004) *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem.* Technical report, December 17, 2004.

Huai-Dong Cao, and Xi-Ping Zhu, (2006) *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow,* Asian J. Math., 10 (2006), pp.165-492.

Karmarkar, N., (1984) *A new polynomial time algorithm for linear programming.*Combinatorica, 4, 373-395, 1984.

Mathiesen, L., (1985) *Computation of economic equilibrium by a sequence of linear complementarity problems.* Mathematical Programming Study, 23, 144-162, 1985.

Paltsev, S., (2004) *Moving from static to dynamic general equilibrium economic models (Notes for a beginner in MPSGE).* MIT Technical Note No.4, June 2004.

Peixoto, M., (1962) *Structural stability on two-dimensional manifolds.* Topology, 1, 101-120, 1962.

Perelman, G., (2002) *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* arXiv, pages 1-39, November 2002.

Perelman, G., (2003a) *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. arXiv, pages 1-7, July 2003.

Perelman, G., (2003b) *Ricci flow surgery on three-manifolds.* arXiv, pages 1-22, March 2003.

Renegar, J., (1988) *A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming.* Mathematical Programming, vol.40, pp.59-93, 1988.

Shub, M. and Smale S., (1995) *On the intractability of Hilbert's Nullstellensatz and on algebraic version of „P=NP".* Duke Math. J. 81, 47-54, 1995.

Smale, S., (1960) *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions.* Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), pp.373-375.

Smale, S., (1996) *Chaos: Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio.* Smale's web page.

Smale, S., (1998) *Mathematical problems for the next century*. Math. Intelligencer, 20, nr.2, pp.7-15, 1998.

Smale, S., (2000) *Mathematical problems for the next century*. in Mathematics: *Frontier and Perspectives 2000* (Eds. V.I. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur), Providence, AMS, 2000.

Stallings J., (1960) *Polyhedral homotopy sheres,* Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), pp.485-488.

Stoilov, S., (1954) *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă. vol.1. Noţiuni şi principii fundamentale.* Editura Academiei RPR, Bucureşti, 1954.

Tucker, W., (2002) *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem.* Foundations of Computational Mathematics, vol.2, p.53-117, 2002.

Turing, A.M., (1936) *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* Proc. London Math. Soc., 42, 230-265, 1936.

Turing, A.M., (1948) *Rounding-of errors in matrix processes.* Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 287-308, 1948.

Zeeman, E.C., (1962) *The Poincaré conjecture for* $n \geq 5$. in „Topology of 3-manifolds and related topics", Prentice Hall, 1962, pp.198-204.

Iulie 10, 2008

Neculai Andrei
Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania.