Modele matematice în Mecanică

Neculai Andrei

Research Institute for Informatics,
Center for Advanced Modeling and Optimization,
8-10, Averescu Avenue, Bucharest 1, Romania
E-mail: nandrei@ici.ro

1. Legile mecanicii

Primul savant modern prin care ştiinţa se defineşte în ea însăşi în opoziţie cu scolasticismul Evului Mediu este Galileo Galilei. El introduce o schimbare fundamentală de metodă în cercetarea ştiinţifică a Naturii, fiind în egală măsură un om de ştiinţă şi un teoretician al metodei ştiinţifice. Împreună cu Francis Bacon este întemeietorul ştiinţei experimentale. În lucrarea sa *Dialoghi* el spune: „*o singură experienţă este de ajuns pentru a infirma o mie de raţionamente şi o mie de raţionamente nu pot să facă falsă o singură experienţă*“. Cuvântul *experiment* provine din acea lume care ne doteză cu experienţă. *Un experiment este o experienţă controlată,* în sensul că acest control permite repetarea experienţei exact în aceleaşi condiţii. Astfel, experienţa se poate transmite şi verifica, ceea ce este foarte important.

Galileo era convins că lumea are o structură matematică şi că pentru a ajunge la cunoaştere trebuie să utilizăm atât *simţurile cât şi raţiunea* în următoarea manieră:

1) Observarea atentă a faptelor dintr-un experiment.
2) Elaborarea ipotezelor matematice, ca o explicaţie a fenomenului observat, adică a legilor naturale formulate în expresii matematice.
3) Verificarea acestor ipoteze prin noi experimente.

Galilei este cel care a înţeles în profunzime demersul lui Pitagora, precizând pentru prima dată în istoria gândirii omeneşti conceptul de lege naturală ca o *expresie matematică*, ca un *model matematic*.

Galilei şi-a dezvoltat teoriile sale în timpul unei mari mişcări intelectuale. Într-adevăr, Biserica Catolică era zguduită de marii reformatori protestanţi Martin Luther şi Jean Calvin care argumentau şi impuneau o interpretare mai literară a Sfintelor Scripturi.

Galileo Galilei (1564-1642)

Pe de altă parte, în domeniul ştiinţei se manifestă disputa dintre cele două concepţii: „geocentristă“ a lui Claudius Ptolemeu şi „heliocentristă“ a lui Nicolaus Copernic. În 1632, la Florenţa, Galilei publică lucrarea: „*Dialoghi quatro sopra i due massimi sistemi del mondo, Ptolemaico et Copernico*“ – „*Patru dialoguri asupra celor două mari sisteme ale lumii, ptolemeic şi copernican*.“ Într-o manieră puţin lipsită de diplomaţie, aduce argumente solide concepţiei copernicane, ceea ce-i atrage anumite prejudicii din partea Bisericii Catolice. El construieşte o lunetă cu care face numeroase observaţii astronomice care confirnă teoria heliocentrică a lui Copernic şi care a făcut posibilă răspândirea ideilor lui în toată Europa. În lucrarea sa „*Discorsi e dimonstrazioni matematichi intorno a due nove scienze*“ - „*Discursuri și demonstrații matematice în jurul a două noi științe*“, publicată în 1638, Galilei defineşte o nouă concepţie despre mişcare care va fi magistral continuată şi dezvoltată de Isaac Newton.

Unul dintre cele mai importante experimente ale lui Galilei a fost cel referitor la căderea corpurilor pe plane înclinate. Pentru a micşora frecarea, corpurile alese erau sfere. În urma acestor experimente Galilei a concluzionat că orice obiect în mişcare, dacă nu este obstrucţionat, va continua să se mişte cu o viteză constantă de-a lungul unei *linii orizontale.* Acesta este *principiul inerției* în versiunea lui Galilei. Deşi argumentele sale erau excepţionale, totuşi concluzia sa nu era întru-totul adevărată. Pentru el o suprafaţă orizontală era una care în orice punct al ei era perpendiculară pe direcţia către centrul Terrei. Ca atare, această suprafaţă de fapt era o sferă centrată în centrul Terrei. Galilei şi-a dat seama că Terra este foarte mare aşa încât local suprafaţa sa este plată, chiar dacă în realitate ea este o sferă. Deci obiectele de pe suprafaţa Terrei par a se deplasa în linii drepte. Spre deosebire de Aristotel care gândea că mişcarea caută starea de repaos, Galilei şi-a dat seama că starea naturală a mişcării este mişcarea cu o viteză constantă pe o linie dreaptă, inerţia fiind responsabilă de continuitatea mişcării. Mai târziu Newton va corecta observaţiile lui Galilei formulând, pentru prima dată, în mod corect, principiul inerţiei. În aceeaşi idee cu a lui Heraclit (*phanta rei*), Galilei era convins că cauza tuturor schimbărilor este mişcarea, care are legile ei intrinsece, independente de orice voinţă exterioară mişcării, legi care se pot cunoaşte doar din cercetarea temeinică a naturii.

Într-un cuvânt, Galilei este primul savant modern care a orientat gândirea către o *știință pur matematică și experimentală*, pledând pentru aplicarea matematicii în cercetările experimentale, conjugând raționamentul deductiv cu cel inductiv.

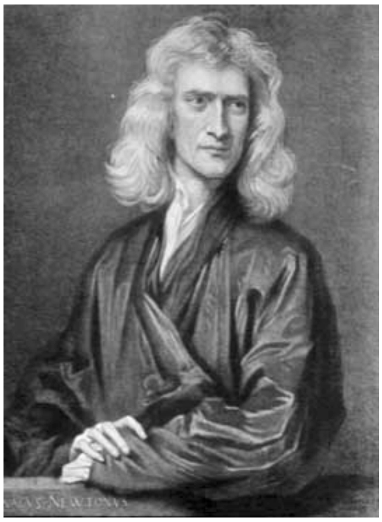
Johannes Kepler (1571-1630)

Unul dintre contemporanii lui Galilei cu o contribuție deosebită la înțelegerea funcționării sistemului nostru planetar şi la consolidarea teoriei copernicane a fost Johannes Kepler. Un împătimit al astronomiei şi pitagorician convins, de-a lungul vieții sale a căutat armonia matematică a lumii. Kepler a beneficiat de datele astronomice înregistrate cu mare acuratețe de Tycho Brahe încercând descrierea structurii sistemului nostru planetar. După mai multe încercări, în care a propus diferite structuri ale sistemului planetar, în lucrările *Astronomia nova* şi *Harmonices mundi* el precizează cele trei legi de mişcare ale planetelor:

1. ***Legea I.*** *Planetele descriu elipse, Soarele ocupând unul dintre focare.*
2. ***Legea II.*** *Legea ariilor. Raza vectoare a planetei descrie (mătură) arii egale în timpuri egale.*
3. ***Legea III.*** *Raportul dintre pătratul timpului de revoluție și cubul semiaxei mari este același pentru toate planetele.*

Aceste legi au fost formulate de Kepler *în mod empiric*, în urma unor combinări şi analize numerice ale observaţiilor astronomice făcute de Tycho Brahe. Ulterior Kepler a încercat o sinteză a acestor legi într-una singură, dar nu a reuşit. Insuccesul lui Kepler se datoreşte faptului că el căuta forța pe tangentă aşa după cum recomanda Aristotel. Aproape 100 de ani mai târziu, Newton urmând gândirea lui Galilei a căutat forța de-a lungul razei vectoare reuşind să formuleze legea atracţiei universale şi din aceasta să deducă legile lui Kepler.

Dar cel mai mare om de ştiinţă al umanităţii, în tradiţia stabilită de Galilei, cu contribuţii esenţiale la fundamentul întregii ştiinţe moderne este Isaac Newton. La fel ca mulţi gânditori ai timpului şi el a avut un spectru larg de preocupări. Paralel cu Leibniz a creat un nou tip de calcul, calculul diferenţial şi integral, care a permis introducerea concepţiei localiste de modelare a fenomenelor naturale prin sisteme de ecuaţii diferenţiale. A demonstrat legea gravitaţiei universale şi a arătat că traiectoriile corpurilor cereşti sunt conice. Continuând opera lui Galilei, Newton a studiat mişcarea corpurilor în medii rezistente, creând aşa numita mecanică Newtoniană, enunţând în mod clar şi distinct cele trei legi ale mecanicii clasice.



Isaac Newton (1642-1727)

Lucrările sale principale au fost „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ şi „*Opticks*“. Descoperirea, împreună cu Leibniz, a calculului diferenţial şi integral a constituit o sursă uriaşă de tehnici şi metode de rezolvare a unor probleme dificile de matematică şi ale ştiinţelor naturii. Rezultatele sale excepţionale sunt o consecinţă a puterii sale de analiză combinată cu o erudiţie şi abilitate înăscută de „*citire a naturii*“, de a efectua experimente practice. Într–un anumit sens lucrările lui Newton pot fi considerate ca ultimile într–o serie de mari realizări care au marcat definitiv cultura noastră, serie care a început cu „*Elementele*“ lui Euclid şi a contituat cu „*Almagestul*“ lui Ptolemeu, „*De revolutionibus orbium coelestium*“ al lui Copernic şi „*La Géométrie*“ lui Descartes. Dar, în acelaşi timp, lucrările lui Newton pot fi considerate primele într-o serie de lucrări excepţionale ca „*Méchanique Analitique*“ a lui Lagrange, „*Treatise on Electricity and Magnetism*“ a lui Maxwell, „*Principia Mathematica*“ a lui Russell, „*The Foundations of Mathematics*“ a lui Hilbert sau „*Elements of Mathematics*“ a lui Bourbaki etc. care au remodelat cultura noastră, modul nostru de gândire, şi care au adus în prim plan problema matematizării ştiinţei în sensul formalizării naturii, adică a exprimării sale în simboluri matematice.

Opera sa fundamentală „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ – „*Principiile matematice ale filosofiei naturale*“, publicată la Londra în 1687, este considerată una dintre cele mai influente cărţi care a dominat gândirea ştiinţifică a ultimilor secole, furnizând instrumentele intelectuale fundamentale pentru realizarea revoluţiei industriale. *Principia* a stabilit o nouă paradigmă a mişcării mecanice, prezentând pentru prima dată acel *salt intelectual* remarcabil de la observaţii la relaţii matematice riguroase. Aici Newton prezintă cele trei legi ale mişcării mecanice, cunoscute şi ca *principiile mecanicii clasice*:

1. ***Principiul inerției.*** „*Un corp își păstrează starea de repaos sau de mișcare rectilinie și uniformă, atât timp cât nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.*“ [*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare.*]
2. ***Principiul independenței acțiunii forțelor.*** „*Accelerația unui corp este proporțională cu forța motoare aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța.*“ [*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*]
3. ***Principiul acțiunii și reacțiunii.*** „*La orice acțiune corespunde totdeauna o reacțiune egală și contrară: sau acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt totdeauna egale și îndreptate în sens contrar.*“ [*Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contraris dirigi.*]

Primele două principii au fost enunțate de Galilei. Newton le-a sistematizat, le-a exprimat în relații matematice, şi le-a încadrat într-un sistem complet, minimal şi necontradictoriu, ca adevărate axiome ale mecanicii.

Principiul al II-lea al mecanicii Newtoniene exprimă *ecuația fundamentală a dinamicii*,

$$F = ma\,,$$

care leagă forța F de masa m şi accelerația a imprimată corpului. Aristotel intuise o asemenea legătură dintre forță şi masă, dar prin intermediul vitezei. Totodată, principiul al II-lea conține şi ***principiul paralelogramului forțelor***: *„când asupra unui punct material acționează simultan două forțe având direcții diferite, efectul este același ca și când asupra punctului ar acționa o forță unică denumită rezultantă și care are ca mărime direcție și sens diagonala paralelogramului având drept laturi forțele considerate.*“ Cu aceasta, într-o formă sintetică, principiul al II-lea se poate formula ca: *„efectul unei forțe asupra unui corp este independent de viteza lui, precum și de acțiunile altor forțe.“*

Tot în *Principia* Newton prezintă cele patru *„reguli pentru a filosofa*“ – *regulae philosophandi*, cunoscute ca şi *„regulile cercetării științifice“:*

1. ***Regula I.*** *„ Singurele cauze care pot fi admise în explicarea fenomenelor sunt cauzele care există real și actual.“* [*Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quœ et verœ sint et earum phœnomenis explicandis sufficiant.*]
2. ***Regula II.*** *„Efectele de același gen trebuie să fie atribuite, pe cât posibil, aceleiași cauze.*“ [*Ideoque effectum naturalium ejusdem generis eœdem assignandœ sunt causœ, quatenus fieri potest.*]
3. ***Regula III.*** *„Calitățile corpurilor care nu sunt susceptibile nici să se mărească, nici să scadă în intesitate, ca și cele care aparțin tuturor corpurilor asupra cărora se poate face experiența trebuie considerate ca aparținând tuturor corpurilor, în general.*“ [*Qualitates corporum quœ intendi et remitti nequeunt, quœque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendœ sunt.*]
4. ***Regula IV.*** *„În filosofia experimentală, propozițiile scoase prin inducție din fenomene trebuie privite, cu toate ipotezele contrare, ca fiind aproape adevărate, până când alte fenomene le vor confirma în întregime sau vor face să se vadă că ele sunt supuse unor excepții.*“ [*In philosophia experimentali, propositiones ex phœnomenis per inductionem collectœ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint phœnomena, per quœ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiœ.*]

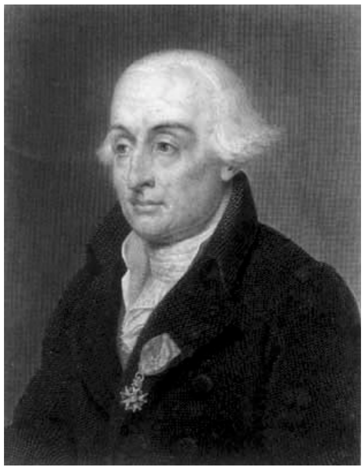
Metoda experimentală a lui Newton se bazează pe două principii. Primul este cel al lui Occam: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* – nu trebuie să multiplicăm cantitățile explicative mai mult decât este necesar. Al doilea arată că *Natura are o economie a ei*, adică ea nu se risipeşte în fenomene, şi ca atare şi gândirea trebuie să respecte acceaşi economie, fără a se complica în tot felul de explicații metafizice, pe baza unor ipoteze care nu răsar din experiență.

Newton s-a ilustrat ca un adevărat om de ştiință dovedind, pentru prima dată, posibilitatea saltului intelectual de la observații şi intuiții la exprimarea în termeni matematici a fenomenelor naturale. El a precizat o astfel de metodă, o astfel de cale, de sinteză în *modele matematice* a mişcării mecanice. Newton a fost un mare sistematizator care a dat tonul în ceea ce priveşte matematizarea naturii fizice (cosmice, macroscopice, dar nu şi microscopice) prin crearea instrumentelor necesare realizării acestui demers (calculul diferențial), precum şi aplicarea acestui instrument în mişcarea mecanică.

2. Ecuațiile Lagrange

Problema fundamentală a mecanicii constă în stabilirea unor relații între forțele care acționează asupra unui sistem de corpuri materiale și mișcarea mecanică realizată de aceste corpuri. Sau altfel spus, *studiul mișcării și echilibrului corpurilor materiale, precum și studiul forțelor care solicită aceste corpuri*. Aceasta a fost rezolvată de Newton. Opera lui a fost continuată cu un deosebit succes de urmaşii săi, Euler, Daniel Bernoulli, Laplace, Maupertuis, d'Alembert, Lagrange, Hamilton, Poisson, Jacobi etc.

Dar cel care a dat o formă magistrală metodei analitice ilustrând puterea calculului diferențial în rezolvarea problemei fundamentale a mecanicii a fost Joseph Louis Lagrange. „*Méchanique Analitique*“ a lui Lagrange, care a apărut exact la 100 de ani după „*Principia*“ lui Newton, reprezintă una dintre culmile de reprezentare în termeni matematici, foarte generali, a fenomenelor mecanice. Atât de puternic s-a dovedit calculul diferențial, încât spre deosebire de Principia lui Newton care abundă în figuri şi raționamente geometrice, Mecanica lui Lagrange nu are nici o figură geometrică (o*n ne trouvera point de figures dans cet ouvrage*), fiind în întregime analitică în sensul cel mai adevărat al cuvântului. El introduce *principiul deplasărilor virtuale* pe care-l aplică în formularea ecuațiilor de mişcare a sistemelor mecanice, ca un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi.



Joseph Lagrange (1736-1813)

Cel care continuă opera lui Lagrange este Sir William Rowan Hamilton care stabileşte sistemul de ecuații canonice, cunoscute ca *ecuațiile Hamilton-Jacobi* şi care încearcă să deducă legile fundamentale ale mecanicii dintr-un principiu unic variațional cunoscut ca *principiul lui Hamilton*.

Caracteristic pentru principiul lui Hamilton nu este numai echivalența sa cu legile mecanicii ale lui Newton, ci faptul că acesta are avantajul deosebit de a fi aplicabil deasemenea sistemelor nemecanice. Aceasta a condus la crearea unei mecanici foarte generale care explică atât sistemele mecanice cât şi cele nemecanice (electrice, fluidice etc.) cunoscută ca *mecanica generalizată*.

William Hamilton (1805-1865)

De-a lungul timpului, în procesul rezolvării problemei fundamentale a mecanicii, cele trei legi ale lui Newton au fost analizate şi interpretate. Pe această cale s-a ajuns la stabilirea aşa numitelor *principii analitice ale mecanicii*, care în esență se bazează pe legile lui Newton. Acestea reprezintă o expresie matematică avansată a legilor mecanicii, ce fundamentează aşa numita *mecanică analitică*.

Principiile analitice, care stau la baza mecanicii analitice, se împart în două categorii: *principiile diferențiale* şi *principiile integrale* sau *variaționale*.

Principiile diferențiale analizează fenomenul mecanic la un moment dat, considerând variații de timp şi spațiu elementare în jurul unui punct. Principalele principii diferențiale sunt: *principiul lucrului mecanic virtual*, *principiul lui d'Alembert* şi *principiul lui Gauss sau al celei mai mici constrângeri*.

<u>*Principiile integrale*</u> analizează fenomenul mecanic într-un interval finit de spațiu şi timp, reducând problema fundamentală a mecanicii la determinarea unor valori care fac staționare anumite integrale. Din această categorie fac parte: *principiul lui Hamilton* şi *principiul celei mai mici acțiuni al lui Maupertuis*.

Principiul lucrului mecanic virtual (sau al *deplasărilor virtuale*, sau încă al *vitezelor virtuale*) poate fi considerat ca legea fundamentală a mecanicii analitice. Deplasările virtuale sunt deplasări infinit mici, instantanee, arbitrare, compatibile cu legăturile şi care se produc în punctele unde se aplică forțele care acționează asupra sistemului. Lucrul mecanic virtual este produs de forțele care acționează sistemul atunci când acestea au deplasări virtuale. *Principiul lucrului mecanic virtual* exprimă faptul că *pentru sisteme fără frecări și care sunt în echilibru, lucrul mecanic virtual al forțelor care acționează sistemul este nul.* Parțial, acest principiu a fost articulat şi de Guido Ubaldi, Torricelli şi Jean Bernoulli, dar forma definitivă i-a dat-o Lagrange în 1788.

Jean d'Alambert (1717-1783)

Principiul lui d'Alembert, formulat de acesta în lucrarea sa „*Traité de dynamique*", publicată în 1743, exprimă faptul că *dacă într-un sistem în mișcare se introduc pe lângă forțele date și a celor de legătură și forțele de inerție, atunci sistemul poate fi tratat ca orice sistem static în echilibru.* Lagrange a arătat că acest principiu este o altă exprimare a principiului deplasărilor virtuale.

Johann Gauss (1777-1855)

Principiul lui Gauss sau al *constrângerii minime* se bazează pe ideea că *dacă un punct material M, de masă m ar parcurge, liber de legături, traiectoria MA, iar datorită unor legături oarecare traiectoria MB, atunci cantitatea $m.AB^2$ ar trebui să aibă o valoare minimă.* Şi pentru acest principiu se arată echivalența sa cu principiul deplasărilor virtuale.

Pierre Maupertuis (1698-1759)

Principiul lui Maupertuis sau *al minimei acțiuni*, formulat în 1745, se exprimă sub forma: *ori de câte ori în natură se produce mișcarea unui sistem material, atunci sistemul trebuie să lucreze astfel încât integrala produsului dintre masă, viteză și spațiu – integrală considerată pe intervalul de spațiu și de timp dintre două poziții succesive date – să fie minimă.* Cum cantitatea mvs se numeşte *acțiune*, de aici derivă numele principiului. Această formulare a principiului minimei acțiuni al lui Maupertuis o regăsim în principiul lui Hamilton pe care-l vom detalia imediat.

Legile mecanicii, aşa cum au fost formulate de Newton, sunt exprimate în termenii conceptelor vectoriale de forță, moment şi accelerație. Formulările ulterioare, în special cele ale lui d'Alembert, Lagrange şi Hamilton, sunt bazate pe conceptele scalare de energie şi lucru, care dau o anumită frumusețe și eleganță mecanicii. Deși, multe aplicații ale mecanicii se bazează pe considerarea directă a legilor lui Newton, totuși experiența a arătat că metodele generalizate, bazate pe conceptele de energie și principiile variaționale, sunt mult mai generale şi mai puternice [Plăcințeanu, 1958], [Vâlcovici, Bălan, Voinea, 1968].

Deşi ecuaţiile de mişcare se pot introduce în manieră Lagrangeană, totuşi pentru simplificarea prezentării vom deduce aceste ecuații plecând de la principiul lui Hamilton. Considerăm un sistem cu n grade de libertate, caracterizat de un set de n coordonate generalizate $q=[q_1,\cdots,q_n]$, unde $q_i = q_i(t)$ fiind funcții continue, cel puțin de două ori continuu diferențiabile. Fie $q(t_0)$ și $q(t_1)$ două puncte din spațiul configurațiilor de la două momente de timp diferite t_0 și t_1. Atunci, *principiul lui Hamilton* afirmă că: *mișcarea sistemului între aceste două configurații se face astfel încât:*

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t=0,$$

unde T este energia cinetică, W lucrul mecanic efectuat de sistem, iar δ reprezintă variația cantităților corespunzătoare.

Această expresie a principiului lui Hamilton este valabilă atât pentru sisteme conservative cât şi pentru cele neconservative. Cantitatea δW se numeşte *lucru virtual* şi se defineşte ca lucrul făcut de sistem în timpul *deplasărilor virtuale*. În coordonate generalizate

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i=Q.\delta q,$$

unde Q_i sunt cunoscute ca *forțele generalizate*, care formează vectorul

$$Q=\left[Q_1,\ldots,Q_n\right].$$

Notăm că lucrul făcut de forțele generalizate, care acționează asupra unui sistem dinamic, în general, depinde de drumul sau de traiectoria de-a lungul căreia are loc mişcarea. Totuși, sunt anumite clase de forțe pentru care lucrul depinde numai de punctul inițial și de cel final al traiectoriei și nu de toată traiectoria. Astfel de forțe se numesc *conservative*, și de aici sistemele asupra cărora acționează numai forțe conservative sunt numite *sisteme conservative*. Ca exemple de forțe conservative menționăm forțele gravitaționale, electrostatice, elastice etc. Forțele neconservative sunt acelea care depind de viteză, timp sau de alți parametri, diferiți de poziție.

Matematic, condiția pentru ca o forță să fie conservativă este ca $Q.\delta q$ să fie o diferențială exactă, adică Q să fie obținut ca gradientul unei funcții scalare, $Q=-\nabla V$. Funcția $V=V(q)$ se numeşte *potențial*, un termen introdus de Lagrange. Semnul minus este convențional, direcția pozitivă a forței este întotdeauna în direcția descreșterii energiei potențiale.

Deci lucrul W făcut de forțele conservative este:

$$W=\int Q\mathrm{d}q=-\int(\nabla V)\mathrm{d}q=-V+\mathrm{const},$$

unde constanta aditivă din relația de mai sus depinde de datele sau punctul inițial în care se calculează lucrul mecanic. Evident că această constantă care se adună la V nu are niciun efect asupra lui Q.

Pentru sisteme conservative principiul lui Hamilton se scrie sub forma:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta W)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t=0,$$

unde $W=-V+\mathrm{const}$ şi comutarea operatorilor δ şi integrală este permisă deoarece ambele funcții energetice T şi V sunt funcții întregi. În cazul general al sistemelor neconservative lucrul virtual δW nu este integrabil și δ nu se poate deplasa în afara integralei.

De obicei se introduce funcţia $L = T - V$, numită *Lagrangean*, în raport cu care principiul lui Hamilton se scrie sub forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = 0.$$

Lagrangeanul este o funcţie $L = L(q, \dot{q}, t)$ în care apar atât coordonatele generalizate cât şi vitezele generalizate. De obicei vitezele generalizate apar în expresia energiei cinetice. Coordonatele generalizate apar în expresia energiei potenţiale şi de asemenea în mod frecvent şi în expresia energiei cinetice. Pentru sistemele conservative timpul t nu apare în mod explicit, dar acesta poate fi prezent pentru acele sisteme care implică deplasarea restricţiilor, a sistemului de coordonate sau funcţii potenţial dependente de timp.

Ecuaţiile lui Lagrange sunt o consecinţă directă a principiului lui Hamilton. Într-adevăr, utilizând tehnicile de calcul variaţional obţinem imediat:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t,$$

şi

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} F_i \delta q_i \mathrm{d}t.$$

Din expresia principiului lui Hamilton, ţinând seama că δq_i sunt arbitrari, rezultă imediat **ecuaţiile Lagrange**:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + F_i = 0, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Ecuaţiile Lagrange sunt cele mai generale ecuaţii de mişcare. Pentru *sisteme conservative* condiţia Euler-Lagrange de staţionaritate a integralei care exprimă principiul lui Hamilton conduce imediat la **ecuaţiile Lagrange**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Observăm că ecuaţiile Lagrange sunt un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, care împreună cu condiţiile iniţiale furnizează un set complet de condiţii pentru descrierea mişcării sistemului.

Ecuaţiile Lagrange reprezintă o pefecţiune şi eleganţă matematică în sensul reducerii ecuaţiilor de mişcare la o formă universală care este aceeaşi pentru toate sistemele de coordonate. Formalismul Lagrangean este exprimat în termenii coordonatelor generalizate şi a vitezelor generalizate. Ecuaţiile de mişcare sunt ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul doi, iar mişcarea este exprimată în funcţie de valorile iniţiale ale coordonatelor şi vitezelor.

Hamilton a transformat cele n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, ecuaţiile Lagrange, într-un sistem de $2n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul unu în variabilele q_i şi p_i, unde p_i sunt *momentele generalizate*. Deşi sistemul canonic Hamilton se poate deduce direct din ecuaţiile Lagrange, totuşi o cale comodă de construcţie a acestuia este prin introducerea Hamiltonianului:

$$H(q, p, t) = p.\dot{q} - L(q, \dot{q}, t),$$

unde $q, \dot{q}$ şi p sunt poziţia, viteza şi respectiv momentul generalizat, în care

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Cu acestea, din principiul lui Hamilton şi ţinând seama de faptul că variaţiile δq_i şi δp_i pot fi alese arbitrar, rezultă **sistemul canonic al lui Hamilton**:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$
$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Ecuaţiile de mai sus, cunoscute ca **ecuaţiile canonice Hamilton** sau **ecuaţiile canonice Jacobi**, reprezintă un sistem de $2n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul unu în variabilele q_i şi p_i, $i = 1, \cdots, n$, care împreună cu condiţiile iniţiale furnizează un set complet de ecuaţii diferenţiale care descriu mişcarea sistemului considerat.

Diferenţa principală dintre ecuaţiile Lagrange şi sistemul canonic Hamilton este că q_i şi p_i sunt variabile independente în ecuaţiile canonice, având aceeaşi poziţie în determinarea mişcării sistemului, în timp ce în ecuaţiile Lagrange numai q_i sunt variabile independente.

Hamilton a adus mecanica la un nou grad de perfecţiune cu influenţe cruciale asupra tuturor domeniilor ştiinţifice ca: mecanica fluidelor, teoria macroscopică a câmpului electromagnetic, teoria maşinilor generalizate, teoria oscilaţiilor, fenomene de transport, mecanica cuantică, precum şi în calculul variaţiilor şi în controlul optimal al sistemelor dinamice cu legături în care principiul lui se exprimă ca *principiul lui Pontriaghin*.

3. Exemple de modele matematice din mecanică

În continuare să prezentăm câteva exemple de modele matematice din mecanică, bazate pe ecuaţiile Lagrange, tema acestei prezentări.

3.1. Pendulul plan simplu

Considerăm un pendul simplu format dintr-un punct material de masă m suspendat printr-o legătură rigidă de lungime l, care se mişcă în plan, ca în figura 1.

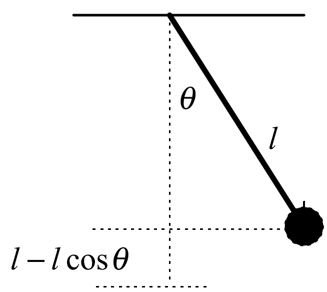


Fig. 1. Pendulul plan simplu

Observăm că viteza pendulului este $v = l\dot{\theta}$. Deci energia cinetică este

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Pe de altă parte, energia potenţială este

$$V = mg(l - l\cos\theta).$$

Cu acstea funcția Lagrange se scrie imediat sub forma

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg(l - l\cos\theta).$$

Ecuațiile de mişcare ale pendulului sunt

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

adică

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Aceeaşi ecuație de mişcare se obține din conservarea energiei. Într-adevăr, energia totală a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(l - l\cos\theta).$$

Deci

$$\frac{dE}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

Observăm că această ecuație are două soluții: fie $\dot{\theta} = 0,$ fie ecuația de mişcare de mai sus. Prima soluție corespunde situației în care pendulul atârnă fără nici un balans. A doua soluție corespunde unui alt tip de mişcare. Dacă energia E este mai mică decât o anumită valoare critică, atunci pendulul se va mişca periodic înainte şi înapoi. Pe de altă parte, dacă energia E este mai mare decât valoarea critică, atunci pendulul se va roti în jurul punctului de suspensie. Dacă energia este egală cu valoarea critică, atunci sunt două posibilități. Prima, dacă pendulul începe mişcarea, atunci acesta se va apropia de poziția verticală din ce în ce mai mult, dar fără să o atingă în timp finit. A doua este situația în care pendulul stă exact în poziție verticală, în care rămâne un timp nedefinit. Dacă energia este zero, atunci pendulul atârnă de punctul de suspensie în poziție verticală.

Valoarea critică a energiei E este acea valoare a energiei potențiale pentru $\theta = \pm\pi$, adică

$$E_{cr} = 2mgl.$$

În acest caz putem determina $\theta(t).$ Într-adevăr, legea de conservare a energiei se scrie:

$$2mgl = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg(l - l\cos\theta),$$

care se poate rearanja sub forma:

$$\dot{\theta} = 2\omega_0\cos\frac{\theta}{2},$$

unde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ este frecvența micilor oscilații. Considerând că pendulul începe mişcarea din $\theta = 0,$ atunci soluția acestei ecuații este

$$\theta(t) = 2\arcsin\left(\frac{1 - \exp(-2\omega_0 t)}{1 + \exp(-2\omega_0 t)}\right).$$

Când timpul creşte, atunci vedem că θ tinde către π. Adică pendulul are exact atâta energie cât îi trebuie pentru a atinge poziția verticală de sus, dar acesta nici odată nu o va atinge în timp finit. Evident că aceasta este o situație idealizată, care nici odată nu va fi întâlnită în practică.

3.2. Pendulul dublu.

Un pendul dublu este un sistem mecanic format din asocierea a două pendule simple, ca în figura 2. Acest sistem mecanic este un exemplu tipic de sistem fizic care poate avea o mişcare haotică. Considerăm pendulul dublu cu masele m_1 şi respectiv m_2 ataşate rigid de barele de lungime l_1 şi respectiv l_2. Se cere să se scrie ecuațiile de mişcare ale acestui sistem, adică modelul matematic al acestuia.

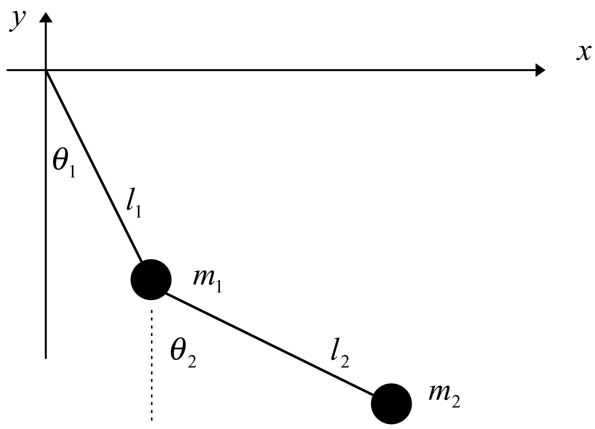


Fig. 2. Pendulul dublu.

În sistemul de coordonate ales pozițiile maselor sunt următoarele:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \,. \end{aligned}$$

Vitezele acestora sunt:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left[l_1\dot\theta_1 \cos\theta_1 \quad l_1\dot\theta_1 \sin\theta_1 \right]^T \\ v_2 &= \left[l_1\dot\theta_1 \cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2 \cos\theta_2 \quad l_1\dot\theta_1 \sin\theta_1 + l_2\dot\theta_2 \sin\theta_2 \right]^T \,. \end{aligned}$$

Cu acestea energia cinetică a sistemului este:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot\theta_1^2 + l_2^2 \dot\theta_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]. \end{aligned}$$

Energia potențială a sistemului este:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 \,. \end{aligned}$$

Dispunând de expresia energiilor putem imediat scrie Lagrangeanul sistemului ca:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot\theta_2^2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \,. \end{aligned}$$

Cu acestea, ecuațiile de mişcare ale sistemului sunt următoarele:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=0,$$

Avem succesiv:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=-(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1-m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1+m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$-m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2),$$

respectiv:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_2gl_2\sin\theta_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2l_2^2\dot{\theta}_2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)=m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$-m_2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2).$$

Cu acestea ecuațiile Lagrange ale sistemului sunt:

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+(m_1+m_2)g\sin\theta_1=0,$$

$$m_2l_2\ddot{\theta}_2+m_2l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+m_2g\sin\theta_2=0.$$

3.3. Pendulul invers.

Considerăm un cărucior de masă m_c care se poate deplasa pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare b, pe care se află un pendul de masă m_p, inerție I şi lungime $2l$, ca în figura 3.

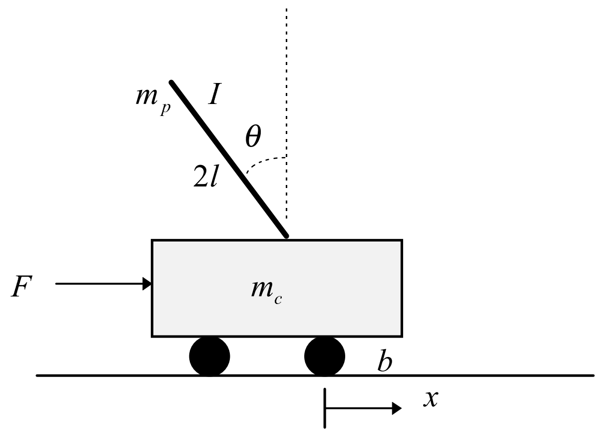


Fig. 3. Pendulul invers.

Considerând căruciorul solicitat de o forță F să se determine modelul matematic al mişcării pendulului.

Pentru determinarea modelului matematic al mişcării vom separa corpurile şi vom aplica a doua lege a lui Newton pentru fiecare dintre ele. În figura 4 se arată corpurile împreună cu toate forțele care acționează asupra lor.

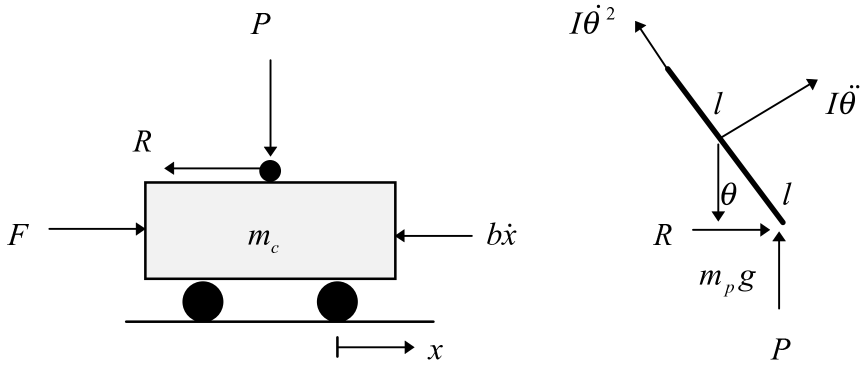


Fig. 4. Forțele care acționează asupra corpurilor.

Legea a doua a lui Newton aplicată căruciorului în direcția orizontală furnizează ecuația:

$$m_c\ddot{x} + b\dot{x} + R = F. \tag{3.3.1}$$

Analog, însumând forțele care acționează asupra pendulului în direcția orizontală, găsim:

$$R = m_p\ddot{x} + m_p l\ddot{\theta}\cos\theta - m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta. \tag{3.3.2}$$

Din (3.3.1) şi (3.3.2) obținem:

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} + m_p l\ddot{\theta}\cos\theta - m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta = F. \tag{3.3.3}$$

Pentru a obține a doua ecuație a mişcării scriem bilanțul forțelor care acționează perpendicular pe pendul, precum şi bilanțul momentelor în centrul de masă al pendulului. Obținem:

$$P\sin\theta + R\cos\theta - m_p g\sin\theta = m_p l\ddot{\theta} + m_p\ddot{x}\cos\theta. \tag{3.3.4}$$

şi

$$-Pl\sin\theta - Rl\cos\theta = I\ddot{\theta}. \tag{3.3.5}$$

Din (3.3.4) şi (3.3.5) rezultă cea dea doua ecuație a mişcării:

$$\left(I + m_p l^2\right)\ddot{\theta} + m_p gl\sin\theta = -m_p l\ddot{x}\cos\theta.$$

Deci modelul matematic al pendulului invers este:

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} + m_p l\ddot{\theta}\cos\theta - m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta = F.$$
$$\left(I + m_p l^2\right)\ddot{\theta} + m_p gl\sin\theta = -m_p l\ddot{x}\cos\theta.$$

Să prezentăm acum modelul liniarizat al pendulului în jurul lui $\theta = \pi$. Presupunem că $\theta = \pi + \varphi$, unde φ este un unghi mic pe care-l face pendulul cu verticala locului. Atunci, $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = -\varphi$ şi $\dot{\theta}^2 = 0$. Ca atare, în jurul poziţiei verticale modelul liniarizat al pendulului este:

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} - m_p l\ddot{\varphi} = F,$$
$$\left(I + m_p l^2\right)\ddot{\varphi} - m_p g l\varphi = m_p l\ddot{x}.$$

Considerând ca variabile de stare mărimile: x, $\dot{x}$, φ şi $\dot{\varphi}$, iar ca ieşire poziţia căruciorului x şi aceea a pendulului φ, rezultă următorul model liniarizat în reprezentarea variabilelor de stare.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-b(I+m_p l^2)}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2} & \dfrac{m_p^2 l^2 g}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-m_p l b}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2} & \dfrac{(m_c+m_p)m_p g l}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0\\ \dfrac{I+m_p l^2}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2}\\ 0\\ \dfrac{m_p l}{(m_c+m_p)I+m_c m_p l^2}\end{bmatrix} F,$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}.$$

3.4. Pendulul lui Furuta.

În figura 5 se arată o variantă a pendulului lui Furuta. Acesta constă din patru corpuri inerţiale legate rigid între ele. Un ax central cu momentul de inerţie J, rigid legat de un braţ orizontal de lungime l_a şi masă m_a, braţul pendulului de lungime l_p şi masă m_p, legat la un capăt de braţul orizontal şi la celălalt capăt purtând o masă m. Se presupune că în braţele pendulului masele sunt uniform distribuite. Scopul este de a descrie ecuaţiile de mişcare ale pendulului când axul central este solicitat cu un moment extern u.

Pentru a scrie ecuaţiile de mişcare ale acestei structuri mecanice considerăm un punct P de pe braţul pendulului, caracterizat de vectorul de poziţie:

$$r(r_a, r_p) = \left[r_x(r_a, r_p) \quad r_y(r_a, r_p) \quad r_z(r_a, r_p)\right]^T \tag{3.4.1}$$

unde

$$r_x(r_a, r_p) = r_a \cos\varphi - r_p \sin\varphi \sin\theta,$$
$$r_y(r_a, r_p) = r_a \sin\varphi + r_p \cos\varphi \sin\theta, \qquad (3.4.2)$$
$$r_z(r_a, r_p) = r_p \cos\theta.$$

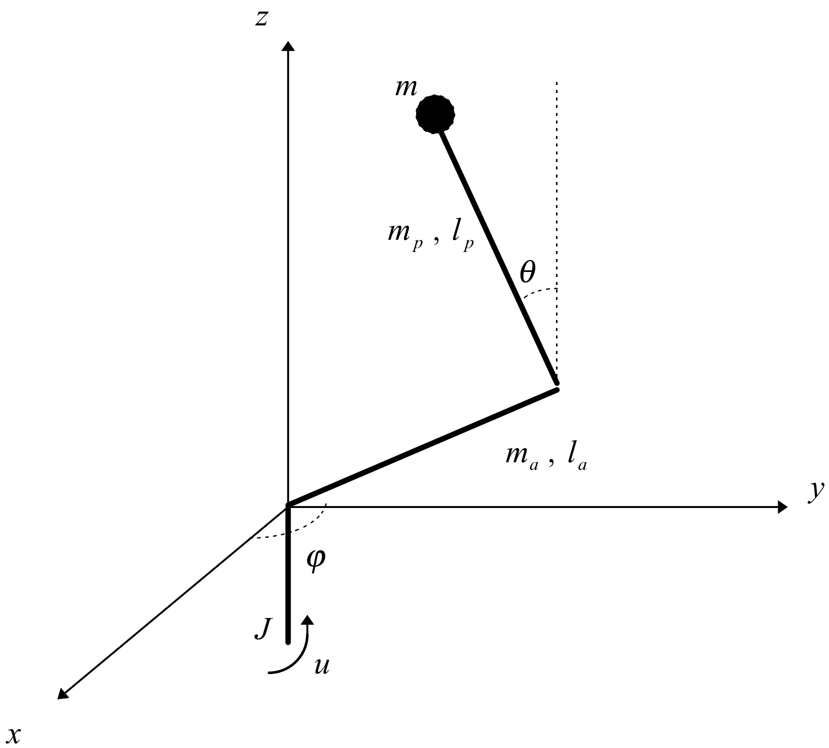


Fig. 5. Pendulul lui Furuta.

Variabila r_a este poziția radială pe brațul orizontal, iar r_p este poziția radială pe brațul pendulului, măsurate de la centrul de rotație corespunzător celor două corpuri. Cu acestea, viteza punctului P este:

$$v(r_a, r_p) = \left[v_x(r_a, r_p) \quad v_y(r_a, r_p) \quad v_z(r_a, r_p) \right]^T, \qquad (3.4.3)$$

unde:

$$v_x(r_a, r_p) = -r_a\dot{\varphi}\sin\varphi - r_p\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - r_p\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$v_y(r_a, r_p) = r_a\dot{\varphi}\cos\varphi + r_p\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r_p\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi, \qquad (3.4.4)$$
$$v_z(r_a, r_p) = -r_p\dot{\theta}\sin\theta.$$

Din relațiile de mai sus putem imediat calcula expresia pătratului mărimii vitezei punctului P:

$$v^2(r_a, r_p) = \left(r_a^2 + r_p^2 \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + 2r_a r_p\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r_p^2\dot{\theta}^2. \qquad (3.4.5)$$

Pentru determinarea ecuațiilor de mișcare ale pendulului, în continuare vom prezenta expresia energiilor cinetice și potențiale corespunzătoare sistemului de corpuri din figura 5. Energia cinetică se calculează ca:

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m,$$

unde v este dat de (3.4.5). Energia potențială este calculată sub forma:

$$V = g\int r_z \mathrm{d}m,$$

unde r_z este dat de (3.4.2).

Considerând, pe rând, fiecare dintre cele patru corpuri inerțiale, obținem:

Axul vertical al pendulului:

$$T_c = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2,$$
$$V_c = 0;$$

Brațul orizontal al pendulului:

$$T_a = \frac{1}{2}\int_0^{l_a} v^2(s,0)\frac{m_a}{l_a}\mathrm{d}s = \frac{1}{6}m_a l_a^2\dot{\varphi}^2,$$
$$V_a = 0;$$

Brațul pendulului:

$$T_p = \frac{1}{2}\int_0^{l_p} v^2(l_a,s)\frac{m_p}{l_p}\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{2}m_p\left(l_a^2 + \frac{1}{3}l_p^2\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_p l_a l_p \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{6}m_p l_p^2\dot{\theta}^2,$$
$$V_p = g\int_0^{l_p} r_z(l_a,s)\frac{m_p}{l_p}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}m_p g l_p\cos\theta;$$

Masa m:

$$T_m = \frac{1}{2}m\left(l_a^2 + l_p^2\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + m l_a l_p\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m l_p^2\dot{\theta}^2,$$
$$V_m = m g l_p\cos\theta.$$

Cu acestea, energia cinetică totală a pendulului este:

$$T = T_c + T_a + T_p + T_m, \tag{3.4.6}$$

iar energia potențială totală:

$$V = V_c + V_a + V_p + V_m. \tag{3.4.7}$$

Considerând Lagrangeanul sistemului:

$$L = T - V, \tag{3.4.8}$$

atunci ecuațiile de mișcare sunt date de:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \tag{3.4.9}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = u, \tag{3.4.10}$$

Ținând seama de relațiile de mai sus obținem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(J + \left(m + \frac{1}{3}m_a + m_p\right)l_a^2 + \left(m + \frac{1}{3}m_p\right)l_p^2 \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\\
&\qquad + \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)l_a l_p \dot{\theta}\cos\theta,\\
&\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(m + \frac{1}{3}m_p\right)l_p^2 \dot{\varphi}^2 \cos\theta \sin\theta - \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)l_a l_p \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\\
&\qquad + \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)g l_p \sin\theta,\\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)l_a l_p \dot{\varphi}\cos\theta + \left(m + \frac{1}{3}m_p\right)l_p^2 \dot{\theta}.
\end{aligned}
$$

Introducând aceste relații în ecuațiile Lagrange (3.4.9)-(3.4.10) de mai sus şi considerând notațiile:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= J + \left(m + \frac{1}{3}m_a + m_p\right)l_a^2,\\
\beta &= \left(m + \frac{1}{3}m_p\right)l_p^2,\\
\gamma &= \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)l_a l_p,\\
\delta &= \left(m + \frac{1}{2}m_p\right)g l_p,
\end{aligned}
$$

obținem următorul model matematic al mişcării pendulului lui Furuta:

$$
(\alpha + \beta\sin^2\theta)\ddot{\varphi} + \gamma\ddot{\theta}\cos\theta + 2\beta\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta - \gamma\dot{\theta}^2\sin\theta = u, \tag{3.4.11}
$$

$$
\gamma\ddot{\varphi}\cos\theta + \beta\ddot{\theta} - \beta\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta - \delta\sin\theta = 0. \tag{3.4.12}
$$

Pentru integrare, modelul (3.4.11)-(3.4.12) se poate pune sub următoarea formă convenabilă:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi = \dot{\varphi},\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\varphi} = \frac{1}{\alpha\beta + \beta^2\sin^2\theta - \gamma^2\cos^2\theta}\Big\{\beta\gamma\dot{\theta}^2\sin\theta - \beta\gamma\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos^2\theta -\\
&\qquad 2\beta^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - \gamma\delta\sin\theta\cos\theta + \beta u\Big\},\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \dot{\theta},\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} = \frac{1}{\alpha\beta + \beta^2\sin^2\theta - \gamma^2\cos^2\theta}\Big\{-\gamma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta +\\
&\qquad \beta(\alpha + \beta\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\beta\gamma\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos^2\theta +\\
&\qquad \delta(\alpha + \beta\sin^2\theta)\sin\theta - \gamma u\cos\theta\Big\}.
\end{aligned}
$$

3.5. Pendule cuplate elastic

Să considertăm două pendule, ambele cu aceeaşi masă m şi lungime l legate printr-un arc, ca în figura 6. Distanța dintre punctele de aplicație ale pendulelor este d.

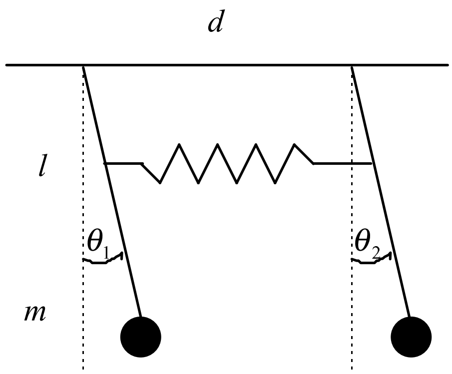


Fig. 6. Două pendule cuplate printr-un arc elastic.

Când pendulele sunt scoase din poziția lor de echilibru cu un unghi θ_1, respectiv θ_2, atunci masele se situează pe pozițiile ($l\sin\theta_1,\ -l\cos\theta_1$) şi respectiv ($d+l\sin\theta_2,\ -l\cos\theta_2$). Deci, lungimea cu care arcul este deformat este

$$\Delta x = \sqrt{(d+l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1)^2 + (l\cos\theta_2 - l\cos\theta_1)^2} - d$$
$$= \sqrt{2l^2[1-\cos(\theta_2-\theta_1)] + 2dl(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + d^2} - d.$$

Pentru deplasări mici (adică θ_i mici) avem: $\sin\theta_i \approx \theta_i$ şi $\cos\theta_i \approx 1-\theta_i^2/2$. Deci

$$\Delta x \approx \sqrt{l^2(\theta_2-\theta_1)^2 + 2dl(\theta_2-\theta_1) + d^2} - d.$$

Presupunând că $\theta_i << 1$, atunci putem scrie:

$$\Delta x \approx d\left(\sqrt{1+\frac{2l}{d}(\theta_2-\theta_1)} - 1\right) \approx d\left(1+\frac{1}{2}\frac{2l}{d}(\theta_2-\theta_1) - 1\right) = l(\theta_2-\theta_1).$$

Cu acestea energia cinetică a maselor este:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2),$$

iar energia potențială:

$$V = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$
$$= -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2.$$

Cu acstea funcția Lagrange se scrie imediat sub forma

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2.$$

Ecuațiile de mişcare ale pendulului sunt

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0,$$

adică:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -(mgl + kl^2)\theta_1 + kl^2\theta_2,$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2 = kl^2\theta_1 - (mgl + kl^2)\theta_2.$$

3.6. Sfera pe o bară înclinată

O sferă de masă m este plasată pe o bară înclinată sub unghiul θ care este antrenată la centru de un cuplu τ. Sfera, aflată la distanța r de centrul barei se poate mişca liber în lungul acesteia, figura 7. Se cere modelul matematic al mişcării sferei pe bară.

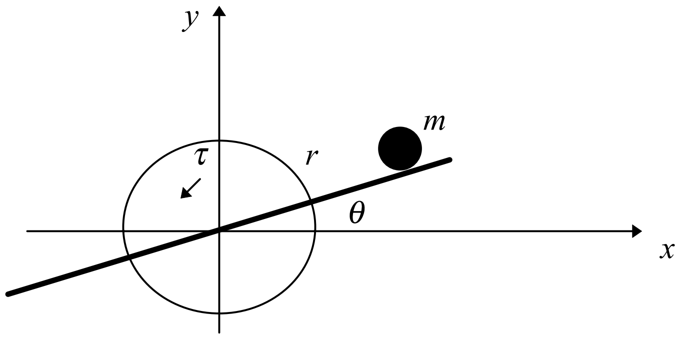


Fig. 7. O sferă pe o bară înclinată.

Presupunem că atât motorul cât şi bara nu au inerție rotațională, astfel încât inerția de rotație a sistemului în jurul centrului de rotație este:

$$J = mr^2.$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right).$$

Energia potențială este:

$$V = mgy = mgr\sin\theta.$$

Cuacestea Lagrangeanul sistemului este:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) - mgr\sin\theta.$$

Presupunem că sistemul are un coeficient de frecare rotațională vâscoasă ν, atunci puterea disipată este:

$$P = \frac{1}{2}\nu\dot{\theta}^2.$$

Introducând coordonatele generalizate $q = \begin{bmatrix}\theta & r\end{bmatrix}^T$, precum şi forța generalizată $Q = \begin{bmatrix}\tau & 0\end{bmatrix}^T$, atunci ecuațiile Lagrange sunt următoarele:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}} = Q.$$

Ținând seama de expresiile Lagrangeanului şi a puterii disipate rezultă ecuațiile Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} mr^2\dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -mgr\cos\theta \\ mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

adică:

$$\begin{bmatrix} 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -mgr\cos\theta \\ mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De unde rezultă că:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g\cos\theta}{r} - \frac{v\dot{\theta}}{mr^2} + \frac{\tau}{mr^2},$$
$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g\sin\theta.$$

Cu acestea modelul matematic al mişcării sferei pe bară este:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \dot{\theta},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} = -\left(\frac{2\dot{r}}{r} + \frac{v}{mr^2}\right)\dot{\theta} - \frac{g\cos\theta}{r} + \frac{\tau}{mr^2},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r = \dot{r},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{r} = m\dot{\theta}^2 - g\sin\theta.$$

3.7. Modelul unor mase cuplate prin legături elastice

Să considerăm sistemul mecanic format din două mase m_1 şi m_2, cuplate ca în figura 8, prin intermediul legăturilor elastice cu coeficienţii k_1 şi respectiv k_2.

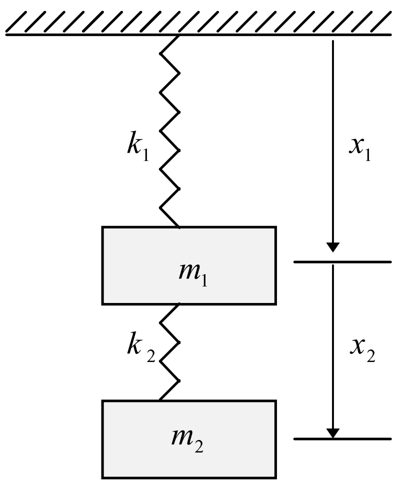


Fig. 8. Mase cuplate prin legături elastice

Sistemul are două grade de libertate x_1 şi x_2. Energia cinetică a sistemului este:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Energia potențială este:

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2.$$

Cu acestea ecuațiile de mișcare a sistemului sunt următoarele:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - m_1 g - m_2 g + k_1 x_1 =$$
$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + k_1 x_1 - (m_1 + m_2)g = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - m_2 g + k_2 x_2 =$$
$$m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - m_2 g = 0.$$

Deci modelul matematic al sistemului de corpuri cu legături elastice de mai sus este:

$$\ddot{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x}_2 + \frac{k_1}{m_1 + m_2}x_1 = g,$$
$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}x_2 = g.$$

3.8. Ecuațiile de mișcare ale unui tren.

Considerăm un tren format dintr-o mașină și un vagon cu masele m_1 , respectiv m_2. Mașina este cuplată cu vagonul printr-o legătură elastică (arc) cu coeficientul k. Fie F forța aplicată mașinii și μ coeficientul de frecare de rostogolire. Sistemul, împreună cu forțele care acționează asupra lui, se poate reprezenta ca în figura 9.

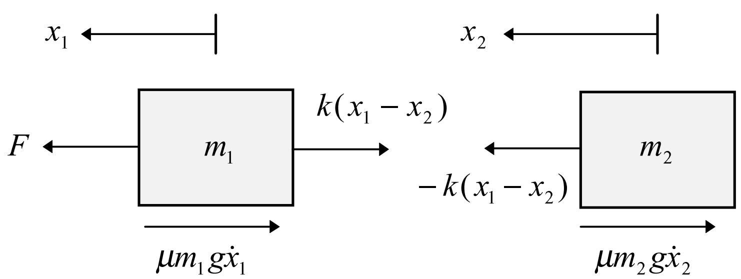


Fig. 9. Reprezentarea forțelor care lucrează asupra sistemului de corpuri.

Aplicând legea a doua a lui Newton obținem ecuațiile de mișcare ale trenului:

$$m_1\ddot{x}_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu m_1 g\dot{x}_1,$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - \mu m_2 g\dot{x}_2.$$

Aceste ecuații se pot exprima sub forma ecuațiilor de stare. Într-adevăr, alegând x_1 și x_2 ca variabile de stare, atunci putem scrie:

$$\dot{x}_1 = v_1$$

$$\dot{v}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 - \mu g v_1 + \frac{F}{m_1}$$
$$\dot{x}_2 = v_2$$
$$\dot{v}_2 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 - \mu g v_2$$

Alegând acum viteza sistemului ca mărime de ieşire, atunci forma matriceală a modelului mişcării trenului este următoarea:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -\mu g & k/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & 0 & -k/m_2 & -\mu g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

3.9. Modelul matematic al suspensiei unui vehicul.
Proiectarea suspensiei unui vehicul este o problemă interesantă. Fie sistemul din figura 10, în care se reprezintă vehiculul de masă m_1, sistemul de suspensie de masă m_2, împreună cu elementele care realizează suspensia: k_1 coeficientul de elasticitate al suspensiei, k_2 coeficientul de elasticitate al roții, b_1 coeficientul de amortizare al sistemului de suspensie, b_2 coeficientul de amortizare al roții, w perturbația cu care drumul acționează asupra suspensiei și u forța externă (de proiectat).

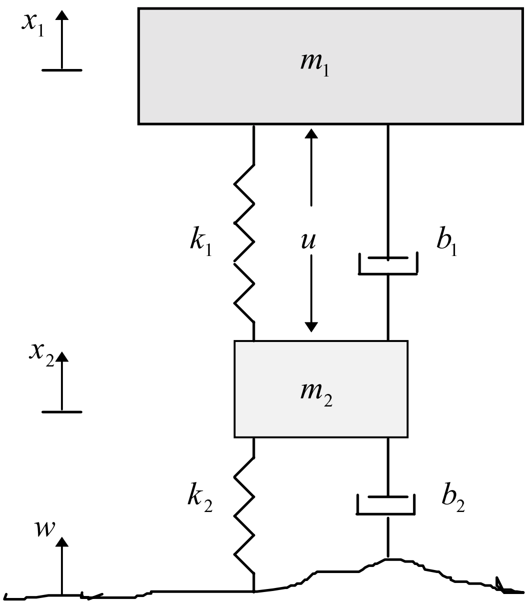


Fig. 10. Reprezentarea suspensiei unui vehicul.

O suspensie de calitate trebuie să realizeze o comportare bună a vehiculului şi un confort în ceea ce priveşte interacţiunea cu denivelările drumului. Când vehiculul este solicitat de denivelările drumului, atunci acesta nu trebuie să aibă oscilaţii prea mari, şi în cazul apariţiei lor acestea trebuie să se stingă repede. Deoarece distanţa $x_1 - w$ este greu de măsurat şi deformarea cauciucurilor roţilor $x_2 - w$ este neglijabilă, rezultă că vom utiliza distanţa $x_1 - x_2$ a mărime de ieşire în raport cu care vom face analiza comportării suspensiei.

Din cea dea doua lege a lui Newton obţinem ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) + u \\ m_2\ddot{x}_2 &= b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{w} - \dot{x}_2) + k_2(w - x_2) - u. \end{aligned}$$

Pentru a obţine o reprezentare în spaţiul stărilor trebuie să selectăm variabilele de stare. Pe moment nu cunoaştem care este cea mai bună alegere ale acestor variabile. De aceea, vom începe prin a scrie:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{b_1}{m_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \frac{k_1}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{u}{m_1} \\ \ddot{x}_2 &= \frac{b_1}{m_2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{k_1}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{b_2}{m_2}(\dot{w} - \dot{x}_2) + \frac{k_2}{m_2}(w - x_2) - \frac{u}{m_2}. \end{aligned}$$

Alegem prima variabilă de stare ca fiind poziţia x_1. Deoarece derivata intrării nu apare în ecuaţia lui $\ddot{x}_1$ vom alege a doua variabilă de stare ca $\dot{x}_1$. A treia variabilă de stare o alegem ca fiind $z_1 = x_1 - x_2$. Cu acestea, putem scrie:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{b_1}{m_1}\dot{z}_1 - \frac{k_1}{m_1}z_1 + \frac{u}{m_1} \\ \ddot{x}_2 &= \frac{b_1}{m_2}\dot{z}_1 + \frac{k_1}{m_2}z_1 + \frac{b_2}{m_2}(\dot{w} - \dot{x}_2) + \frac{k_2}{m_2}(w - x_2) - \frac{u}{m_2}. \end{aligned}$$

Scăzând a doua ecuaţie de mai sus din prima, obţinem:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 = &-\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2}\right)\dot{z}_1 - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)z_1 - \frac{b_2}{m_2}(\dot{w} - \dot{x}_2) \\ &- \frac{k_2}{m_2}(w - x_2) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u\,. \end{aligned}$$

Integrând obţinem:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = &-\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2}\right)z_1 - \frac{b_2}{m_2}(w - x_2) \\ &+ \int_0^t \left[-\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)z_1 - \frac{k_2}{m_2}(w - x_2) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Observăm că în această ecuație nu apare derivata intrării. Mai mult, deoarece $x_2 = x_1 - z_1$, rezultă că $\dot{z}_1$ este exprimat numai în funcție de stările selectate până acum și de intrare. Ca atare, integrala din relația de mai sus o notăm cu z_2. Deci

$$\dot{z}_2 = -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)z_1 - \frac{k_2}{m_2}(w - x_1 + z_1) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u.$$

Cu acestea, putem scrie:

$$\dot{z}_1 = -\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2}\right)z_1 - \frac{b_2}{m_2}(w - x_1 - z_1) + z_2.$$

Substituind această relație în ecuația lui $\ddot{x}_1$ obținem:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 = &-\left(\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)x_1 + \left[\frac{b_1}{m_1}\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2} + \frac{b_2}{m_2}\right) - \frac{k_1}{m_1}\right]z_1 \\ &- \frac{b_1}{m_1}z_2 + \frac{u}{m_1} + \left(\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)w.\end{aligned}$$

Cu acestea, considerând variabilele de stare: x_1, $\dot{x}_1$, z_1 și z_2 modelul matematic al sistemului de suspensie al unui vehicul, în reprezentarea prin variabile de stare este următorul:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right) & 0 & \left(\dfrac{b_1}{m_1}\left(\dfrac{b_1}{m_1} + \dfrac{b_1}{m_2} + \dfrac{b_2}{m_2}\right) - \dfrac{k_1}{m_1}\right) & -\dfrac{b_1}{m_1} \\ \dfrac{b_2}{m_2} & 0 & -\left(\dfrac{b_1}{m_1} + \dfrac{b_1}{m_2} + \dfrac{b_2}{m_2}\right) & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\left(\dfrac{k_1}{m_1} + \dfrac{k_1}{m_2} + \dfrac{k_2}{m_2}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & \dfrac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \\ 0 & -\dfrac{b_2}{m_2} \\ \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

3.10. Parașuta.

Un paraşutist de masă m se lansează de la altitudinea x_0 în cădere liberă sub influența gravitației. Presupunem că forța de rezistență a aerului este proporțională cu viteza paraşutistului, unde constanta de proporționalitate este diferită în funcție de starea paraşutei (închisă sau deschisă).

Modelul matematic al paraşutei se obține din a doua lege a lui Newton sub forma:

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{x},$$
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

unde x este altitudinea la care se află paraşutistul deasupra Pământului, g este accelerația gravitațională, iar k coeficientul de rezistență al aerului. Ecuația de mişcare de mai sus se poate imediat scrie sub forma unui sistem diferențial în care apar poziția şi viteza paraşutistului:

$$\dot{v} = -g - \frac{k}{m}v, \quad v(0) = 0,$$
$$\dot{x} = v, \quad x(0) = x_0.$$

Considerând m, g şi k constante, atunci soluția explicită a sistemului de mai sus este:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$
$$x(t) = x_0 + \frac{m^2 g}{k^2}\left(-\frac{k}{m}t + \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right)$$

Totuşi, în problema paraşutei k nu este o constantă. Forma generală a evoluției coeficientului de rezistență a aerului este:

$$k(t) = \begin{cases} k_1, & t < t_d, \\ k_2, & t \geq t_d, \end{cases}$$

unde t_d este timpul când paraşuta se deschide. Este posibil ca t_d să fie o funcție de viteză în sensul că deschiderea paraşutei apare la o anumită viteză a paraşutistului, sau o funcție de poziție în care caz deschiderea apare la o anumită altitudine a paraşutistului. Pentru a determina modelul matematic al vitezei paraşutistului este necesar să găsim soluția pentru $k = k_1$, apoi să calculăm t_d, după care să rezolvăm problema cu $k = k_2$ unde condițiile inițiale sunt selectate astfel încât să se realizeze continuitatea vitezei şi poziției paraşutistului la momentul deschiderii paraşutei: $v(t_d^+) = v(t_d^-)$ şi $x(t_d^+) = x(t_d^-)$, unde $t_d^\pm$ este limita la dreapta, respectiv la stânga a lui t_d. În acest caz, pentru $0 \leq t < t_d$ viteza paraşutistului este:

$$v(t) = \frac{mg}{k_1}\left(e^{-\frac{k_1}{m}t} - 1\right)$$

iar, pentru $t \geq t_d$:

$$v(t) = \frac{mg}{k_1}\left(e^{-\frac{k_1}{m}t_d} - 1\right)e^{-\frac{k_2}{m}(t-t_d)} + \frac{mg}{k_2}\left(e^{-\frac{k_2}{m}(t-t_d)} - 1\right)$$

Viteza la aterizare se poate calcula imediat din condiția $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$. Utilizând ecuația de mişcare rezultă că: $v(t_f) = -mg/k$.

Din ecuațiile de mişcare vedem că accelerația paraşutistului este: $a = -g - (k/m)v$. La momentul deschiderii paraşutei apare un salt de accelerație, aşa numitul *șoc de deschidere*, calculat sub forma:

$$j(t) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{k}(t)}{m}v(t) - \frac{k(t)}{m}a(t).$$

Cum k este constantă pe porțiuni, rezultă că accelerația la momentul deschiderii totale a paraşutei are un salt de discontinuitate $j(t_d) = j(t_d^+) - j(t_d^-)$. Dar $a(t_d^-) = 0$, deci

$$j(t_d) = -\frac{k(t_d^+)a(t_d^+)}{m}.$$

Un model mult mai realist se obține dacă se ia în considerație şi timpul necesar deschiderii paraşutei [Meade, 1998], precum şi aria secțiunii transversale şi forma paraşutei [Meade şi Struthers, 1999].

Bibliografie

Gäfvert, M., (1998) Modeling the Furuta pendulum. Department of Automatic control, Lund Institute of Technology, ISRN LUTFD2/TFRT–7574–SE, April 1998.

Meade, D.B., (1998) ODE models for the parachute problem. SIAM Review, 40, June 1998, pp. 327–332.

Meade, D.B., Struthers, A.A., (1999) Differential equations in the new millenium: the parachute problem. Int. J. Engng. vol.15, 1999.

Plăcințeanu, I., (1958) Mecanica vectorială şi analitică. Mecanica corpului cu masă variabilă. Ediția a II-a. Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., (1968) Mecanica teoretică. Ediția a II-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.

25 Aprilie, 2003 - 5 Ianuarie 2006