

MAXFUN

O SUBRUTINĂ DE CALCUL A MAXIMULUI UNEI FUNCTII NELINIARE DE O VARIABILĂ, BAZATĂ PE METODA DE INTERPOLARE PĂTRATICĂ POWELL

Neculai Andrei

**Institutul Național de Cercetare Dezvoltare în Informatică
București**

REZUMAT

În acest raport tehnic se prezintă o subrutină Fortran pentru determinarea maximului unei funcții neliniare de o variabilă, care utilizează metoda Powell [1964]. Funcția este foarte generală și se presupune că nu este derivabilă, sau cel puțin nu se apelează la derivata ei. Punctul de maxim se determină prin interpolare pătratică în jurul punctului de maxim.

**Raport Tehnic
București
Septembrie 23, 1980**

CUPRINS

1. Descrierea algoritmului
2. Descrierea subrutinei
3. Listarea programelor
4. Probleme de test și experimente computaționale

1. Descrierea algoritmului

1.1. Formularea problemei

Considerăm maximizarea unei funcții neliniare, de o singură variabilă,

$$\max f(x), \quad (1)$$

unde variabila $x \in \mathbb{R}$.

În această lucrare vom utiliza o metodă de căutare directă (fără utilizarea derivatei funcției) cu localizarea punctelor prin interpolarea pătratică a funcției în jurul punctului de maxim, descrisă de Powell [1964].

1.2. Metoda de calcul

Localizarea punctului de maxim al funcției f se face în două etape distincte. În prima etapă se determină trei puncte din jurul punctului de maxim, iar în a doua se îmbunătățește localizarea maximumului până când un criteriu de oprire a iterațiilor este îndeplinit.

Pentru problema (1), funcția fiind de o singură variabilă, direcția de deplasare este paralelă cu axa reală. Ideea este ca plecând dintr-un punct inițial să se efectueze mici deplasări de valoare $\pm\Delta x$ în direcția paralelă cu axa reală până când se localizează punctul de maxim.

În continuare, pentru determinarea maximumului se utilizează interpolarea pătratică, adică funcția f se înlocuiește cu una pătratică pentru care punctul de maxim se calculează imediat. Odată calculat acest punct, din mulțimea curentă a punctelor (4 puncte) se elimină cel pentru care valoarea funcției este minimă și se continuă cu efectuarea unei noi interpolări.

Procesul de interpolare se poate prezenta astfel. În punctul de maxim x^* are loc egalitatea

$$f'(x^*) = 0. \quad (2)$$

Acum dezvoltând funcția $f(x)$ în serie Taylor în jurul punctului x^* și reținând numai termenii de ordinul doi, obținem:

$$f(x) \cong f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(x^*), \quad (3)$$

care arată că $f(x)$, în jurul lui x^* , se poate aproxima printr-o funcție pătratică.

Ca atare, în jurul lui x^* , vom aproxima funcția $f(x)$ printr-un polinom de ordinul doi pentru care putem calcula punctul de maxim.

Dacă x_1 , x_2 și x_3 sunt trei puncte printre care știm că se află punctul de optim al funcției f , atunci aceasta se poate aproxima cu parabola:

$$f(x) \approx c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2), \quad (4)$$

care trece prin aceste puncte. Maximumul acestui polinom (4) se obține în punctul x^* pentru care derivata se anulează, adică

$$\frac{df}{dx} = c_2 + c_3(2x^* - x_1 - x_2) = 0, \quad (5)$$

sau

$$2x^* = x_1 + x_2 - \frac{c_2}{c_3}. \quad (6)$$

Prin înlocuirea în (4) a lui x cu x_1 , apoi cu x_2 și în final cu x_3 , rezultă sistemul liniar:

$$\begin{aligned}
f_1 &= f(x_1) = c_1, \\
f_2 &= f(x_2) = c_1 + c_2(x_2 - x_1), \\
f_3 &= f(x_3) = c_1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),
\end{aligned} \tag{7}$$

prin rezolvarea căruia se obțin valorile coeficienților c_1, c_2 și c_3 :

$$\begin{aligned}
c_1 &= f_1, \\
c_2 &= \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \\
c_3 &= \frac{f_3 - f_1 - \frac{(x_3 - x_1)(f_2 - f_1)}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Prin introducerea în (6) a expresiilor lui c_2 și c_3 din (8) se obține imediat:

$$x^* = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}. \tag{9}$$

Pentru ca punctul x^* dat de (9) să corespundă unui maxim trebuie ca

$$f''(x^*) < 0, \tag{10}$$

ceea ce impune ca

$$f_3 + f_1 > 2f_2. \tag{11}$$

Evident că punctul x^* va aproxima punctul de maxim al funcției f cu o acuratețe care depinde de măsura în care această funcție se poate aproxima cu un polinom de gradul doi în jurul punctelor considerate mai sus. Ca atare, se propune verificarea condițiilor de continuare a iterațiilor:

$$|x^* - x_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \tag{12}$$

unde ε este un parametru pozitiv suficient de mic, care precizează acuratețea de calcul a punctului de maxim.

Nu în toate cazurile acest procedeu de interpolare repetată conduce la soluție. Calitatea rezultatelor obținute prin înlocuirea funcției f printr-un polinom de interpolare de gradul doi depinde în mare măsură de intervalul în care se află punctele de interpolare x_1 , x_2 și x_3 . În consecință, procedura recomandată este de a continua căutarea maximumului cu strategia de dublare a lungimii pasului Δx atunci când se constată o îmbunătățire a valorilor funcției, precum și de o schimbare a direcției de deplasare cu pasul $-\Delta x$, atunci când valorile funcției se reduc.

1.3. Algoritmul metodei Powell

Algoritmul acestei metode de căutare directă a maximumului unei funcții utilizează pași de căutare de lungime variabilă, și în vecinătatea maximumului utilizează o interpolare pătratică a funcției, după cum urmează.

<i>Pasul 1.</i>	Se consideră o lungime a pasului de deplasare Δx suficient de mică. Se alege un punct inițial x_1 și se calculează valoarea funcției în acest punct.
<i>Pasul 2.</i>	Din punctul x_1 se efectuează o deplasare de valoare Δx , $x + \Delta x$, și se calculează valoarea funcției în acest nou punct. Dacă valoarea funcției în acest nou punct crește, atunci mărimea pasului de deplasare se dublează și se evaluează funcția în acest nou punct. În caz contrar direcția de deplasare este schimbată și următorul punct este localizat la distanța $-\Delta x$ de punctul inițial.

<i>Pasul 3.</i>	Dacă valorile funcției cresc, atunci se continuă cu dublarea pasului, în caz contrar acesta se înjumătățește.
<i>Pasul 4.</i>	Se determină punctul adițional $x = x + \Delta x/2$, unde Δx este lungimea curentă a pasului de căutare. Se rețin cele mai bune trei puncte pe care le renumerotăm: x_1, x_2, x_3 .
<i>Pasul 5.</i>	Se calculează punctul x^* dat de (9).
<i>Pasul 6.</i>	Se evaluează funcția de maximizat în x^* și se testează criteriul (12). Dacă criteriul este satisfăcut, atunci se reține x^* ca punct de maxim pentru f , stop; altfel, din x_1, x_2, x_3, x^* se rețin cele mai bune trei puncte cu care se continuă cu pasul 5. ♦

Detalii se găsesc în listingul subrutinei prezentat în acest raport tehnic.

2. Descrierea subrutinei

2.1. Considerații generale

Subrutina MAXFUN este destinată calcului maximului unei funcții de o singură variabilă care utilizează numai valorile acesteia. Programul, scris în Fortran, are la bază o metodă de căutare cu localizarea punctului de maxim local prin interpolarea polinomială pătratică. Subrutina MAXFUN se poate utiliza atunci când nu se dispune de derivata funcției de maximizat, sau aceasta este dificil de calculat. Subrutina apelează subrutina FUNC care definește funcția de maximizat.

2.2. Descrierea secvenței de apel

Subrutina MAXFUN se apelează cu instrucțiunea

```
CALL MAXFUN ( EPS , PAS , X1 )
```

unde:

EPS este un parametru real care precizează acuratețea de calcul a maximului funcției f .

PAS este un parametru real care fixează mărimea pasului de căutare.

X1 este o variabilă reală care desemnează punctul inițial de unde începe căutarea maximului.

Subrutina MAXFUN determină maximul local. Pentru determinarea maximului global este necesar să se execute mai multe încercări cu diferite puncte inițiale.

2.3. Subrutine apelate

MAXFUN apelează subrutina FUNC (X, Y) care specifică funcția de maximizat, unde:

X este o variabilă reală care este punctul în care se calculează valoarea funcției,

Y este o variabilă reală care reprezintă valoarea funcției în punctul X .

2.4. Cerințe de memorie

Subrutina MAXFUN utilizează trei vectori (dublă precizie) de dimensiune 3. Nu sunt necesare alte arii de lucru și nici alte structuri de date. Subrutina utilizează fișierul MAXFUN.OUT în care se afișează procesul de optimizare și elementele finale ale acestuia.

2.5. Alte caracteristici

Subrutina MAXFUN are parametrul logic IPRINT care fixează condițiile de afișare a procesului de maximizare a funcției f . Dacă IPRINT=.TRUE. atunci subrutina afișează rezultatele procesului de calcul. În prima etapă se afișează X , $F(X)$ și PAS. În a doua etapă se afișează numai X^* și $F(X^*)$.

În final, când criteriul de oprire a iterațiilor este satisfăcut, subrutina MAXFUN afișează punctul de maxim (local) determinat, valoarea funcției în acest punct și acuratețea cu care s-a calculat maximumul.

3. Listarea programelor

```

C*****
C
C                               MAXFUN
C                               =====
C
C  Subrutina de calcul a maximumului unei functii neliniare
C  de o variabila.
C  Variabila nu este supusa nici unei restrictii.
C  Nu se utilizeaza derivata functiei pentru care se cauta
C  punctul de maxim.
C
C                               max(f(x))
C
C  Subrutina implementeaza metoda de cautare directa Powell.
C
C  Secventa de apel:
C  call maxfun(eps,pas,x1)
C  unde:
C  eps = acuratetea de calcul a solutiei.
C  pas = lungimea pasului de cautare.
C  x1  = punctul initial (de unde incepe cautarea maximumului).
C
C  Subrutine apelate:
C  Subroutine func(x,y)
C     x punctul in care se calculeaza valoarea functiei
C     y = f(x)  valoarea functiei in punctul x.
C
C
C
C
C
C                               Neculai Andrei
C                               1980, ICI - Bucuresti
C*****

      subroutine maxfun(eps,pas,x1)
**
      double precision t1(3), t2(3), vf(3)
      double precision eps,pas
      double precision x1,y1, x2,y2, x3,y3, x4,y4
      double precision a,b,c,d,e,f,p,r,xe,xmax,vfxe,vfmax
      logical iprint

* Open the output file
      open(unit=2,file='maxfun.out',status='unknown')

      iprint=.true.

      call func(x1,y1)
      if(iprint) then
        write(2,100)
100  format(/,24x,1hX,20x,4hF(X),17x,5hPASUL)
        write(2,101) x1,y1,pas
101  format(15x,e20.13,2x,e20.13,2x,e20.13)
      end if

```

```

* Incrementarea variabilei
  x2=x1+pas
  ii=0
1   call func(x2,y2)
    if(iprint) write(2,101) x2,y2,pas

* Compararea valorilor functiei n cele doua puncte
  if(y2-y1) 3,6,6
3   if(ii-1) 4,4,5
4   ii=ii+1

* Schimbarea directiei de cautare
  pas=-pas
  x2=x1+pas
  go to 1
5   go to 11
6   continue
  x3=x2+pas
  go to 8
7   x3=x4
8   call func(x3,y3)
    if(iprint) write(2,101) x3,y3,pas

* Dublarea pasului
  pas=pas*2.d0
  x4=x3+pas
  call func(x4,y4)
  if(y4-y3) 9,10,10
9   go to 12
10  go to 7

* Evaluarea a trei puncte in jurul maximului
11  t1(1)=x1
    t1(2)=x1+pas/2.d0
    t1(3)=x2
    go to 13
12  t1(1)=x3
    t1(2)=x3+pas/2.d0
    t1(3)=x4
    go to 13

* Evaluarea functiei in aceste puncte
13  do 14 i=1,3
    call func(t1(i),vf(i))
14  continue

* Interpolarea patratica utilizand aceste puncte
  if(iprint) write(2,102)
102 format(/,24x,2hX*,19x,5hF(X*))

15  continue
    a=t1(2)-t1(3)
    b=t1(3)-t1(1)
    c=t1(1)-t1(2)

    d=t1(2)**2-t1(3)**2
    e=t1(3)**2-t1(1)**2
    f=t1(1)**2-t1(2)**2

    p=0.5d0*(d*vf(1)+e*vf(2)+f*vf(3))

```

```

        r=          a*vf(1)+b*vf(2)+c*vf(3)

        xe=p/r
        call func(xe,vfxe)
        if(iprint) write(2,103)xe,vfxe
103    format(15x,e20.13,2x,e20.13)

        do 18 j=1,3
            t2(j)=dabs(t1(j)-xe)
            if(t2(j)-eps) 16,16,17
16        xmax=t1(j)
            go to 25
17        continue
18    continue

* Determinarea si inlocuirea punctului de valoare maxima
        if(vf(2)-vf(1)) 20,19,19
19    if(vf(3)-vf(1)) 20,21,21
20    if(vf(3)-vf(2)) 23,22,22
21    jk=1
        go to 24
22    jk=2
        go to 24
23    jk=3
24    t1(jk)=xe
        vf(jk)=vfxe
        go to 15

25    call func(xmax,vfmax)
        write(2,104) xmax
104    format(/15x,'Punctul de maxim determinat. xmax=',2x,e20.13)
        write(2,105) vfmax
105    format(/15x,'Valoarea functiei in punctul xmax=',2x,e20.13)
        write(2,106) eps
106    format(/15x,'Acuratetea de calcul a solutiei   ',2x,e20.13)

        return
        end
*****

        subroutine func(x,y)
        double precision x,y

* Exemplul 1
c1    y = -x*x + 6.d0*x - 2.d0
c1    y =-y

* Exemplul 2
c2    y = x**5 - 2.d0*x**3 +10.d0*dsin(5.d0*x)
c2    y =-y

* Exemplul 3
c3    y = 1.d0 - 10.d0*x + 0.01d0*exp(x)
c3    y =-y

* Exemplul 4
c4    y=-1.d0+2.d0/(x**2+1.d0)

* Exemplul 5
c5    y=-x/(x*x+1.d0)

```



```

* Exemplul 6
c6      y=5.d0*x**5-4.d0*x**4+400.d0*x*dsin(4.d0*x-4.d0)
c6      y=-y

* Exemplul 7
c7      y=x**4-12.d0*x**3+15.d0*x**2+56.d0*x-60.d0

* Exemplul 8
      y=-x**4+12.d0*x**3-47.d0*x**2+60.d0*x

      return
      end
*****

* Main Program for MAXFUN subroutine

      double precision eps,pas,x1
      eps= 0.00001d0
      pas= 0.001d0
      x1 = 2.8d0
      call maxfun(eps,pas,x1)
      stop
      end
***** Last line

```

4. Probleme de test și experimente computaționale

În cele ce urmează prezentăm câteva probleme de test și rezultatele obținute cu subrutina MAXFUN.

Exemplul 1

$$y = -x^2 + 6x - 2$$

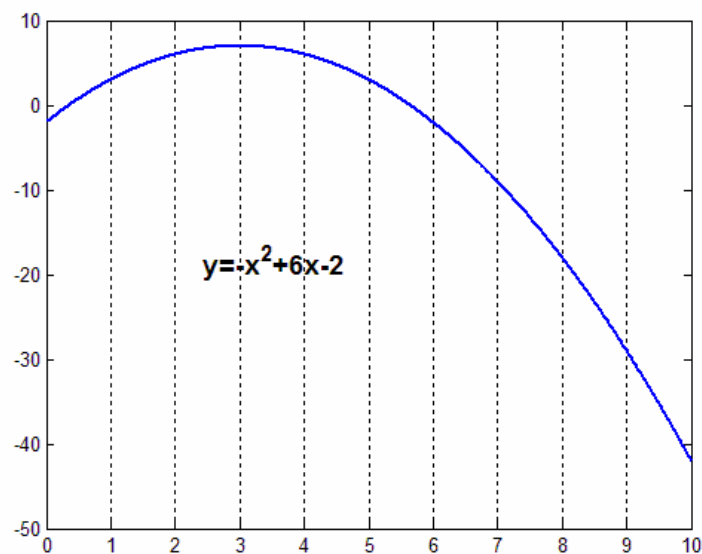


Fig. 1. Graficul funcției $y = -x^2 + 6x - 2$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 0$:

X	F(X)	PASUL
0.000000000000E+00	-0.200000000000E+01	0.100000000000E-01
0.100000000000E-01	-0.194010000000E+01	0.100000000000E-01
0.200000000000E-01	-0.188040000000E+01	0.100000000000E-01
0.400000000000E-01	-0.176160000000E+01	0.200000000000E-01
0.800000000000E-01	-0.152640000000E+01	0.400000000000E-01
0.160000000000E+00	-0.106560000000E+01	0.800000000000E-01
0.320000000000E+00	-0.182400000000E+00	0.160000000000E+00
0.640000000000E+00	0.143040000000E+01	0.320000000000E+00
0.128000000000E+01	0.404160000000E+01	0.640000000000E+00
0.256000000000E+01	0.680640000000E+01	0.128000000000E+01

X*	F(X*)
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.300000000000E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.700000000000E+01

Acuratetea de calcul a solutiei 0.100000000000E-03

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 9$:

X	F(X)	PASUL
0.900000000000E+01	-0.290000000000E+02	0.100000000000E-01
0.901000000000E+01	-0.291201000000E+02	0.100000000000E-01
0.899000000000E+01	-0.288801000000E+02	-0.100000000000E-01
0.898000000000E+01	-0.287604000000E+02	-0.100000000000E-01
0.896000000000E+01	-0.285216000000E+02	-0.200000000000E-01
0.892000000000E+01	-0.280464000000E+02	-0.400000000000E-01
0.884000000000E+01	-0.271056000000E+02	-0.800000000000E-01
0.868000000000E+01	-0.252624000000E+02	-0.160000000000E+00
0.836000000000E+01	-0.217296000000E+02	-0.320000000000E+00
0.772000000000E+01	-0.152784000000E+02	-0.640000000000E+00
0.644000000000E+01	-0.483360000000E+01	-0.128000000000E+01
0.388000000000E+01	0.622560000000E+01	-0.256000000000E+01

X*	F(X*)
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.300000000000E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.700000000000E+01

Acuratetea de calcul a solutiei 0.100000000000E-03

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 19$:

X	F(X)	PASUL
0.190000000000E+02	-0.249000000000E+03	0.100000000000E-01
0.190100000000E+02	-0.249320100000E+03	0.100000000000E-01
0.189900000000E+02	-0.248680100000E+03	-0.100000000000E-01
0.189800000000E+02	-0.248360400000E+03	-0.100000000000E-01
0.189600000000E+02	-0.247721600000E+03	-0.200000000000E-01
0.189200000000E+02	-0.246446400000E+03	-0.400000000000E-01
0.188400000000E+02	-0.243905600000E+03	-0.800000000000E-01
0.186800000000E+02	-0.238862400000E+03	-0.160000000000E+00
0.183600000000E+02	-0.228929600000E+03	-0.320000000000E+00
0.177200000000E+02	-0.209678400000E+03	-0.640000000000E+00
0.164400000000E+02	-0.173633600000E+03	-0.128000000000E+01
0.138800000000E+02	-0.111374400000E+03	-0.256000000000E+01
0.876000000000E+01	-0.261776000000E+02	-0.512000000000E+01
-0.148000000000E+01	-0.130704000000E+02	-0.102400000000E+02

X*	F(X*)
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01
0.300000000000E+01	0.700000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.300000000000E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.7000000000000E+01
 Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-03

Exemplul 2

$$y = -x^5 + 2x^3 - 10\sin(5x)$$

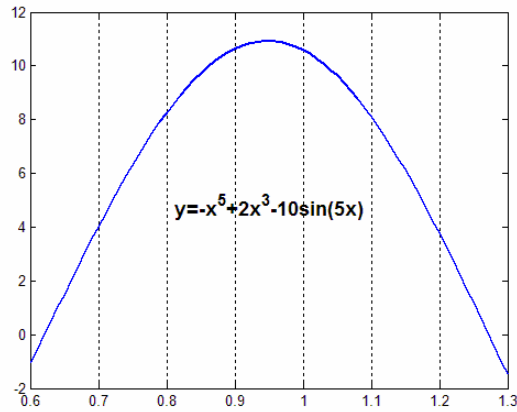


Fig.2. Graficul functiei $y = -x^5 + 2x^3 - 10\sin(5x)$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 0.6$:

X	F(X)	PASUL
0.6000000000000E+00	-0.1056960080599E+01	0.1000000000000E-01
0.6100000000000E+00	-0.5451440524244E+00	0.1000000000000E-01
0.6200000000000E+00	-0.3076390753291E-01	0.1000000000000E-01
0.6400000000000E+00	0.1000655251876E+01	0.2000000000000E-01
0.6800000000000E+00	0.3038881663468E+01	0.4000000000000E-01
0.7600000000000E+00	0.6742978371827E+01	0.8000000000000E-01
0.9200000000000E+00	0.1083520451313E+02	0.1600000000000E+00
X*	F(X*)	
0.9342631862344E+00	0.1091072450157E+02	
0.9483843252688E+00	0.1093443202867E+02	
0.9479132333687E+00	0.1093446242322E+02	
0.9478961984724E+00	0.1093446245975E+02	
Punctul de maxim determinat. xmax=	0.9479132333687E+00	
Valoarea functiei in punctul xmax=	0.1093446242322E+02	
Acuratetea de calcul a solutiei	0.1000000000000E-03	

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 1.6$:

X	F(X)	PASUL
0.1600000000000E+01	-0.1218734246623E+02	0.1000000000000E-01
0.1610000000000E+01	-0.1227949803630E+02	0.1000000000000E-01
0.1590000000000E+01	-0.1207673025248E+02	-0.1000000000000E-01
0.1580000000000E+01	-0.1194736989520E+02	-0.1000000000000E-01
0.1560000000000E+01	-0.1163155943135E+02	-0.2000000000000E-01
0.1520000000000E+01	-0.1076926192351E+02	-0.4000000000000E-01
0.1440000000000E+01	-0.8156447060892E+01	-0.8000000000000E-01
0.1280000000000E+01	-0.4071618853049E+00	-0.1600000000000E+00
0.9600000000000E+00	0.1091574539076E+02	-0.3200000000000E+00
X*	F(X*)	
0.3913300708606E+01	-0.8044473924144E+03	
0.9651448981455E+00	0.1089646084294E+02	
0.9450280680076E+00	0.1093341124543E+02	
0.9478930819700E+00	0.1093446245841E+02	

```

0.9478964634282E+00  0.1093446245975E+02
Punctul de maxim determinat. xmax=  0.9478930819700E+00
Valoarea functiei in punctul xmax=  0.1093446245841E+02
Acuratetea de calcul a solutiei      0.1000000000000E-03

```

Exemplul 3

$$y = -1 + 10x - 0.01e^x$$

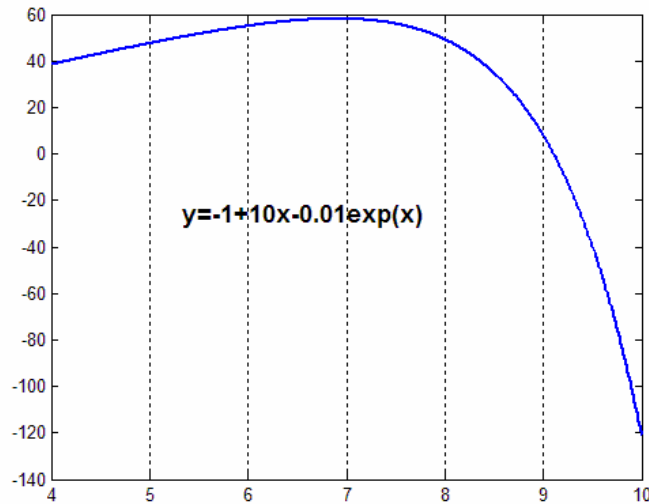


Fig.3. Graficul funcției $y = -1 + 10x - 0.01e^x$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 6$:

X	F(X)	PASUL
0.6000000000000E+01	0.5496571206507E+02	0.1000000000000E-01
0.6010000000000E+01	0.5502516679726E+02	0.1000000000000E-01
0.6020000000000E+01	0.5508421404273E+02	0.1000000000000E-01
0.6040000000000E+01	0.5520106965113E+02	0.2000000000000E-01
0.6080000000000E+01	0.5542970805282E+02	0.4000000000000E-01
0.6160000000000E+01	0.5586571925165E+02	0.8000000000000E-01
0.6320000000000E+01	0.5664427007549E+02	0.1600000000000E+00
0.6640000000000E+01	0.5774905006980E+02	0.3200000000000E+00

X*	F(X*)
0.6892520110675E+01	0.5807639810941E+02
0.6905928763461E+01	0.5807753611918E+02
0.6907611719148E+01	0.5807755268678E+02
0.6907760295117E+01	0.5807755278970E+02
0.6907727496136E+01	0.5807755278596E+02

```

Punctul de maxim determinat. xmax=  0.6907760295117E+01
Valoarea functiei in punctul xmax=  0.5807755278970E+02
Acuratetea de calcul a solutiei      0.1000000000000E-03

```

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 16$:

X	F(X)	PASUL
0.1600000000000E+02	-0.8870210520508E+05	0.1000000000000E-01
0.1601000000000E+02	-0.8959507415967E+05	0.1000000000000E-01
0.1599000000000E+02	-0.8781802243506E+05	-0.1000000000000E-01
0.1598000000000E+02	-0.8694273743059E+05	-0.1000000000000E-01
0.1596000000000E+02	-0.8521821143244E+05	-0.2000000000000E-01
0.1592000000000E+02	-0.8187093877279E+05	-0.4000000000000E-01

0.1584000000000E+02	-0.7556503888118E+05	-0.8000000000000E-01
0.1568000000000E+02	-0.6437060597797E+05	-0.1600000000000E+00
0.1536000000000E+02	-0.4670318756673E+05	-0.3200000000000E+00
0.1472000000000E+02	-0.2456050180651E+05	-0.6400000000000E+00
0.1344000000000E+02	-0.6735984673383E+04	-0.1280000000000E+01
0.1088000000000E+02	-0.4232359991811E+03	-0.2560000000000E+01
0.5760000000000E+01	0.5342651671082E+02	-0.5120000000000E+01

X*	F(X*)
0.8164993263997E+02	-0.2884796572033E+34
0.3200000000000E+01	0.3075467469803E+02
0.2596196364865E+02	-0.1884245524382E+10
0.4480001080644E+01	0.4291766312618E+02
0.1325204591201E+02	-0.5560814051385E+04
0.5167533374392E+01	0.4892051918236E+02
0.9788405498178E+01	-0.8137454630444E+02
0.5891640949266E+01	0.5429642130311E+02
0.8224743772614E+01	0.4392578774834E+02
0.6562597450864E+01	0.5754488865661E+02
0.7326910330329E+01	0.5706234210937E+02
0.6861968358963E+01	0.5806722874767E+02
0.6882985697746E+01	0.5807451030120E+02
0.6912167000697E+01	0.5807745533011E+02
0.6907892966774E+01	0.5807755269503E+02
0.6907736560190E+01	0.5807755278807E+02
0.6907751555020E+01	0.5807755278975E+02

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.6907736560190E+01
Valoarea functiei in punctul xmax= 0.5807755278807E+02
Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-03

Exemplul 4

$$y = -1 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

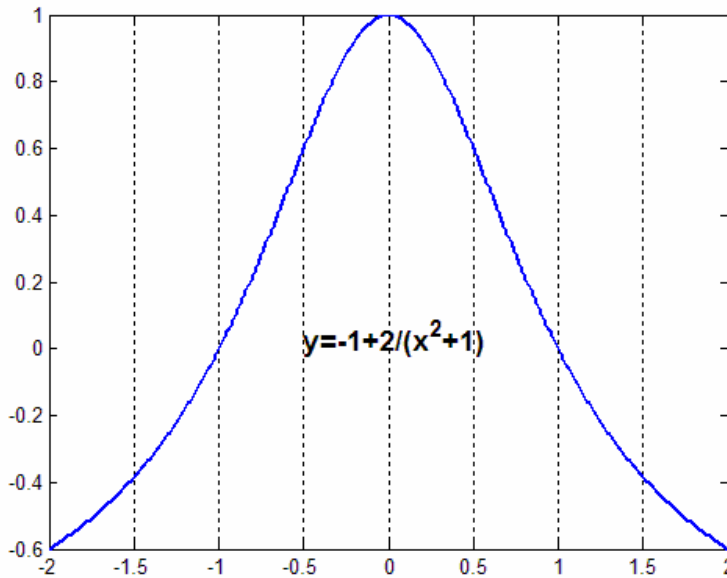


Fig. 4. Graficul funcției $y = -1 + 2/(x^2 + 1)$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 1$:

X	F(X)	PASUL
0.1000000000000E+01	0.0000000000000E+00	0.1000000000000E-03
0.1000100000000E+01	-0.9999500000001E-04	0.1000000000000E-03
0.9999000000000E+00	0.1000050000000E-03	-0.1000000000000E-03
0.9998000000000E+00	0.2000199999996E-03	-0.1000000000000E-03
0.9996000000000E+00	0.4000799999936E-03	-0.2000000000000E-03

0.9992000000000E+00	0.8003199998974E-03	-0.4000000000000E-03
0.9984000000000E+00	0.1601279998359E-02	-0.8000000000000E-03
0.9968000000000E+00	0.3205119973702E-02	-0.1600000000000E-02
0.9936000000000E+00	0.6420479577877E-02	-0.3200000000000E-02
0.9872000000000E+00	0.1288191320266E-01	-0.6400000000000E-02
0.9744000000000E+00	0.2592756984187E-01	-0.1280000000000E-01
0.9488000000000E+00	0.5250891180346E-01	-0.2560000000000E-01
0.8976000000000E+00	0.1076124341812E+00	-0.5120000000000E-01
0.7952000000000E+00	0.2252326569788E+00	-0.1024000000000E+00
0.5904000000000E+00	0.4830500430915E+00	-0.2048000000000E+00
0.1808000000000E+00	0.9366921669633E+00	-0.4096000000000E+00

X*	F(X*)
0.9422887739543E-02	0.9998224341395E+00
-0.9613309237380E-03	0.9999981516874E+00
-0.1449529650041E-03	0.9999999579773E+00
0.4342438844043E-07	0.1000000000000E+01
0.7707318570614E-10	0.1000000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.4342438844043E-07

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.1000000000000E+01

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 2$:

X	F(X)	PASUL
0.2000000000000E+01	-0.6000000000000E+00	0.1000000000000E-03
0.2000100000000E+01	-0.6000319982401E+00	0.1000000000000E-03
0.1999900000000E+01	-0.5999679982399E+00	-0.1000000000000E-03
0.1999800000000E+01	-0.5999359929594E+00	-0.1000000000000E-03
0.1999600000000E+01	-0.5998719718351E+00	-0.2000000000000E-03
0.1999200000000E+01	-0.5997438873207E+00	-0.4000000000000E-03
0.1998400000000E+01	-0.5994875491253E+00	-0.8000000000000E-03
0.1996800000000E+01	-0.5989741952407E+00	-0.1600000000000E-02
0.1993600000000E+01	-0.5979447708633E+00	-0.3200000000000E-02
0.1987200000000E+01	-0.5958750023924E+00	-0.6400000000000E-02
0.1974400000000E+01	-0.5916913568181E+00	-0.1280000000000E-01
0.1948800000000E+01	-0.5831441363520E+00	-0.2560000000000E-01
0.1897600000000E+01	-0.5653010954134E+00	-0.5120000000000E-01
0.1795200000000E+01	-0.5263742119625E+00	-0.1024000000000E+00
0.1590400000000E+01	-0.4333269745064E+00	-0.2048000000000E+00
0.1180800000000E+01	-0.1646788250225E+00	-0.4096000000000E+00
0.3616000000000E+00	0.7687304307665E+00	-0.8192000000000E+00

X*	F(X*)
0.7305766346491E-01	0.9893818292781E+00
-0.6842686890170E-02	0.9999063596567E+00
-0.5227662283848E-02	0.9999453445877E+00
0.2708323940965E-04	0.9999999985330E+00
0.2139248604362E-06	0.9999999999999E+00
-0.3717185492006E-09	0.1000000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.2139248604362E-06

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.9999999999999E+00

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = -2$:

X	F(X)	PASUL
-0.2000000000000E+01	-0.6000000000000E+00	0.1000000000000E-03
-0.1999900000000E+01	-0.5999679982399E+00	0.1000000000000E-03
-0.1999800000000E+01	-0.5999359929594E+00	0.1000000000000E-03
-0.1999600000000E+01	-0.5998719718351E+00	0.2000000000000E-03
-0.1999200000000E+01	-0.5997438873207E+00	0.4000000000000E-03
-0.1998400000000E+01	-0.5994875491253E+00	0.8000000000000E-03
-0.1996800000000E+01	-0.5989741952407E+00	0.1600000000000E-02
-0.1993600000000E+01	-0.5979447708633E+00	0.3200000000000E-02
-0.1987200000000E+01	-0.5958750023924E+00	0.6400000000000E-02
-0.1974400000000E+01	-0.5916913568181E+00	0.1280000000000E-01

-0.1948800000000E+01	-0.5831441363520E+00	0.2560000000000E-01
-0.1897600000000E+01	-0.5653010954134E+00	0.5120000000000E-01
-0.1795200000000E+01	-0.5263742119625E+00	0.1024000000000E+00
-0.1590400000000E+01	-0.4333269745064E+00	0.2048000000000E+00
-0.1180800000000E+01	-0.1646788250225E+00	0.4096000000000E+00
-0.3616000000000E+00	0.7687304307665E+00	0.8192000000000E+00

X*	F(X*)
-0.7305766346491E-01	0.9893818292781E+00
0.6842686890170E-02	0.9999063596567E+00
0.5227662283848E-02	0.9999453445877E+00
-0.2708323940965E-04	0.9999999985330E+00
-0.2139248604362E-06	0.9999999999999E+00
0.3717185492006E-09	0.1000000000000E+01

Punctul de maxim determinat. xmax= -0.2139248604362E-06

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.9999999999999E+00

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

Exemplul 5

$$y = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

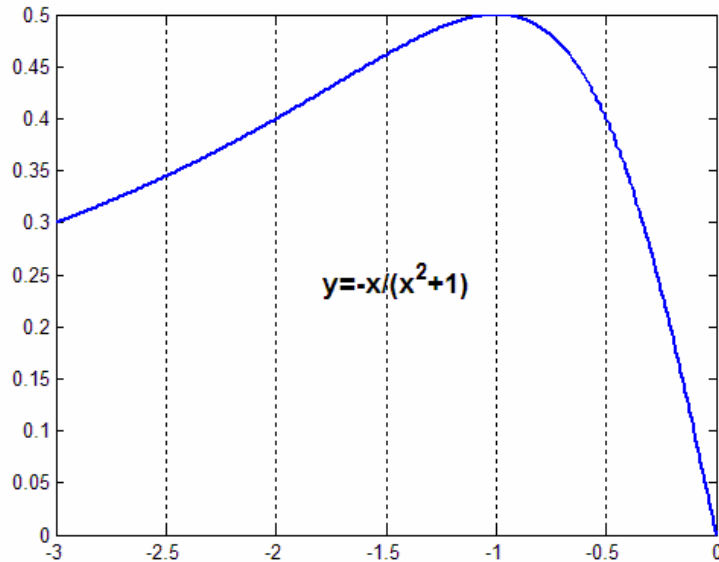


Fig. 5. Graficul funcției $y = -\frac{x}{x^2 + 1}$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = -2$:

X	F(X)	PASUL
-0.2000000000000E+01	0.4000000000000E+00	0.1000000000000E-02
-0.1999000000000E+01	0.4001200159888E+00	0.1000000000000E-02
-0.1998000000000E+01	0.4002400639102E+00	0.1000000000000E-02
-0.1996000000000E+01	0.4004802552801E+00	0.2000000000000E-02
-0.1992000000000E+01	0.4009610182155E+00	0.4000000000000E-02
-0.1984000000000E+01	0.4019240493200E+00	0.8000000000000E-02
-0.1968000000000E+01	0.4038560039926E+00	0.1600000000000E-01
-0.1936000000000E+01	0.4077423876855E+00	0.3200000000000E-01
-0.1872000000000E+01	0.4155951180006E+00	0.6400000000000E-01
-0.1744000000000E+01	0.4315191056074E+00	0.1280000000000E+00
-0.1488000000000E+01	0.4629537444495E+00	0.2560000000000E+00
-0.9760000000000E+00	0.4998525025402E+00	0.5120000000000E+00
X*	F(X*)	
-0.9139527713615E+00	0.4979828675007E+00	

```

-0.9787976199533E+00    0.4998852066807E+00
-0.9979501702457E+00    0.4999989473940E+00
-0.9997065088836E+00    0.4999999784594E+00
-0.9999751557291E+00    0.499999998457E+00
-0.999997039910E+00    0.5000000000000E+00
-0.1000007059208E+01    0.499999999875E+00

Punctul de maxim determinat. xmax= -0.9999997039910E+00

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.5000000000000E+00

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

```

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 0$:

X	F(X)	PASUL
0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.1000000000000E-02
0.1000000000000E-02	-0.9999990000010E-03	0.1000000000000E-02
-0.1000000000000E-02	0.9999990000010E-03	-0.1000000000000E-02
-0.2000000000000E-02	0.1999992000032E-02	-0.1000000000000E-02
-0.4000000000000E-02	0.3999936001024E-02	-0.2000000000000E-02
-0.8000000000000E-02	0.7999488032766E-02	-0.4000000000000E-02
-0.1600000000000E-01	0.1599590504831E-01	-0.8000000000000E-02
-0.3200000000000E-01	0.3196726552011E-01	-0.1600000000000E-01
-0.6400000000000E-01	0.6373892536172E-01	-0.3200000000000E-01
-0.1280000000000E+00	0.1259366538631E+00	-0.6400000000000E-01
-0.2560000000000E+00	0.2402546699501E+00	-0.1280000000000E+00
-0.5120000000000E+00	0.4056589422443E+00	-0.2560000000000E+00
-0.1024000000000E+01	0.4998594145397E+00	-0.5120000000000E+00

X*	F(X*)
-0.2071400265235E+00	0.1986179289168E+00
-0.1157640021440E+01	0.4946903864513E+00
-0.9266270884226E+00	0.4985517392721E+00
-0.1005082330434E+01	0.4999935752152E+00
-0.1000984806111E+01	0.4999997577779E+00
-0.9999235229530E+00	0.499999985377E+00
-0.9999977184160E+00	0.499999999987E+00
-0.1000000814984E+01	0.499999999998E+00

```

Punctul de maxim determinat. xmax= -0.9999977184160E+00

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.499999999987E+00

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

```

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = -1.5$:

X	F(X)	PASUL
-0.1500000000000E+01	0.4615384615385E+00	0.1000000000000E-02
-0.1499000000000E+01	0.4616567718951E+00	0.1000000000000E-02
-0.1498000000000E+01	0.4617750163070E+00	0.1000000000000E-02
-0.1496000000000E+01	0.4620113056884E+00	0.2000000000000E-02
-0.1492000000000E+01	0.4624830753513E+00	0.4000000000000E-02
-0.1484000000000E+01	0.4634232865830E+00	0.8000000000000E-02
-0.1468000000000E+01	0.4652896459742E+00	0.1600000000000E-01
-0.1436000000000E+01	0.4689598235980E+00	0.3200000000000E-01
-0.1372000000000E+01	0.4759948709124E+00	0.6400000000000E-01
-0.1244000000000E+01	0.4883149835763E+00	0.1280000000000E+00
-0.9880000000000E+00	0.4999635654082E+00	0.2560000000000E+00

X*	F(X*)
-0.9516691673250E+00	0.4993871278254E+00
-0.9929682164060E+00	0.4999875512759E+00
-0.9995155183585E+00	0.4999999412909E+00
-0.9999536633444E+00	0.4999999994632E+00
-0.9999981289288E+00	0.499999999991E+00
-0.1000008240168E+01	0.499999999830E+00
-0.1003698126448E+01	0.4999965935858E+00
-0.1000001113136E+01	0.499999999997E+00

```

Punctul de maxim determinat. xmax= -0.9999981289288E+00
Valoarea functiei in punctul xmax= 0.499999999991E+00
Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

```


Exemplul 6

$$y = -5x^5 + 4x^4 - 400x\sin(4x - 4)$$

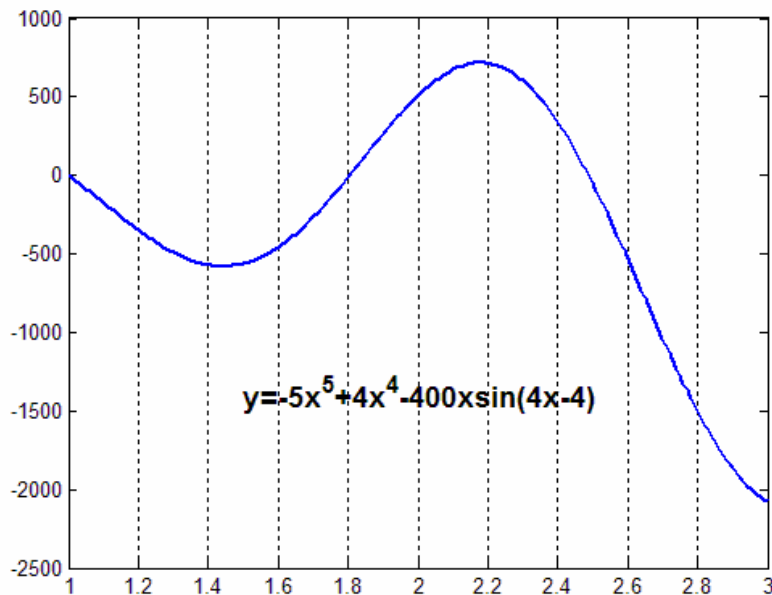


Fig. 6. Graficul funcției $y = -5x^5 + 4x^4 - 400x\sin(4x - 4)$

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 1.6$:

X	F(X)	PASUL
0.16000000000000E+01	-0.4585108355527E+03	0.10000000000000E-02
0.16010000000000E+01	-0.4569871050544E+03	0.10000000000000E-02
0.16020000000000E+01	-0.4554544028314E+03	0.10000000000000E-02
0.16040000000000E+01	-0.4523621559165E+03	0.20000000000000E-02
0.16080000000000E+01	-0.4460708115955E+03	0.40000000000000E-02
0.16160000000000E+01	-0.4330650324035E+03	0.80000000000000E-02
0.16320000000000E+01	-0.4053980899869E+03	0.16000000000000E-01
0.16640000000000E+01	-0.3437777189167E+03	0.32000000000000E-01
0.17280000000000E+01	-0.1986746138756E+03	0.64000000000000E-01
0.18560000000000E+01	0.1442298807839E+03	0.12800000000000E+00
0.21120000000000E+01	0.6849244571104E+03	0.25600000000000E+00

X*	F(X*)
0.2166303073421E+01	0.7151065299567E+03
0.2176238964866E+01	0.7161273850707E+03
0.2178554963320E+01	0.7161574523794E+03
0.2178282972942E+01	0.7161580178312E+03
0.2178277903464E+01	0.7161580180111E+03

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.2178282972942E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.7161580178312E+03

Acuratetea de calcul a solutiei 0.10000000000000E-04

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 2.8$:

X	F(X)	PASUL
0.28000000000000E+01	-0.1503564007511E+04	0.10000000000000E-02
0.28010000000000E+01	-0.1507787058630E+04	0.10000000000000E-02
0.27990000000000E+01	-0.1499330499482E+04	-0.10000000000000E-02
0.27980000000000E+01	-0.1495086591387E+04	-0.10000000000000E-02
0.27960000000000E+01	-0.1486567803211E+04	-0.20000000000000E-02
0.27920000000000E+01	-0.1469407945519E+04	-0.40000000000000E-02
0.27840000000000E+01	-0.1434612092024E+04	-0.80000000000000E-02
0.27680000000000E+01	-0.1363221786524E+04	-0.16000000000000E-01
0.27360000000000E+01	-0.1214124256748E+04	-0.32000000000000E-01

0.2672000000000E+01	-0.8980586645493E+03	-0.6400000000000E-01
0.2544000000000E+01	-0.2563824928294E+03	-0.1280000000000E+00
0.2288000000000E+01	0.6242897799850E+03	-0.2560000000000E+00

X*	F(X*)
0.2182048141131E+01	0.7160530180967E+03
0.2174118288918E+01	0.7160306598688E+03
0.2178267982103E+01	0.7161580172663E+03
0.2178274418129E+01	0.7161580179149E+03

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.2178267982103E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.7161580172663E+03

Acuratetea de calcul a solutiei 0.1000000000000E-04

Exemplul 7

$$y = x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 56x - 60$$

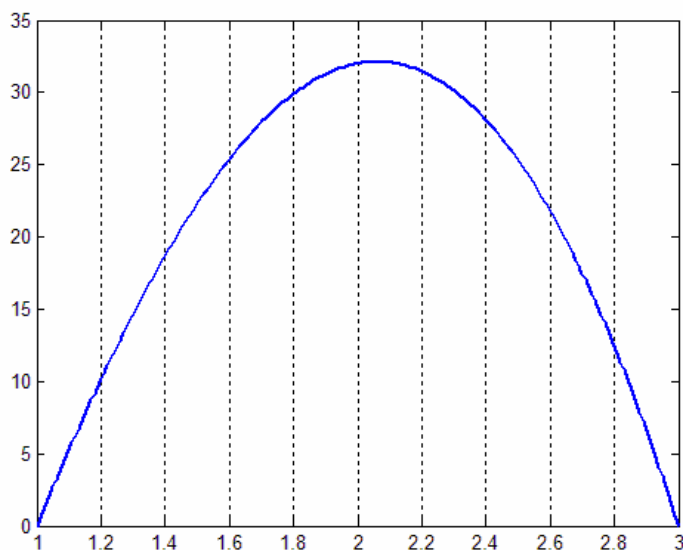


Fig. 7. Graficul funcției $y = x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 56x - 60$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 1.2$:

X	F(X)	PASUL
0.1200000000000E+01	0.1013760000000E+02	0.1000000000000E-02
0.1201000000000E+01	0.1018465243280E+02	0.1000000000000E-02
0.1202000000000E+01	0.1023166570242E+02	0.1000000000000E-02
0.1204000000000E+01	0.1032557457946E+02	0.2000000000000E-02
0.1208000000000E+01	0.1051292047770E+02	0.4000000000000E-02
0.1216000000000E+01	0.1088571521434E+02	0.8000000000000E-02
0.1232000000000E+01	0.1162363967898E+02	0.1600000000000E-01
0.1264000000000E+01	0.1306821958042E+02	0.3200000000000E-01
0.1328000000000E+01	0.1582751390106E+02	0.6400000000000E-01
0.1456000000000E+01	0.2078964685210E+02	0.1280000000000E+00
0.1712000000000E+01	0.2821327919514E+02	0.2560000000000E+00
0.2224000000000E+01	0.3119775193498E+02	0.5120000000000E+00

X*	F(X*)
0.2086745843389E+01	0.3209610923756E+02
0.2065316374297E+01	0.3211938353073E+02
0.2060246115299E+01	0.3212034634381E+02
0.2059973735036E+01	0.3212034899811E+02
0.2059965381418E+01	0.3212034900048E+02

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.2059973735036E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.3212034899811E+02

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 2.8$:

X	F(X)	PASUL
0.28000000000000E+01	0.12441600000000E+02	0.10000000000000E-02
0.28010000000000E+01	0.1238712923920E+02	0.10000000000000E-02
0.27990000000000E+01	0.1249599324080E+02	-0.10000000000000E-02
0.27980000000000E+01	0.1255030896642E+02	-0.10000000000000E-02
0.27960000000000E+01	0.1265870789146E+02	-0.20000000000000E-02
0.27920000000000E+01	0.1287457577370E+02	-0.40000000000000E-02
0.27840000000000E+01	0.1330259278234E+02	-0.80000000000000E-02
0.27680000000000E+01	0.1414376102298E+02	-0.16000000000000E-01
0.27360000000000E+01	0.1576671353242E+02	-0.32000000000000E-01
0.26720000000000E+01	0.1877579831706E+02	-0.64000000000000E-01
0.25440000000000E+01	0.2385373338010E+02	-0.12800000000000E+00
0.22880000000000E+01	0.3032617621914E+02	-0.25600000000000E+00

X*	F(X*)
0.2056346663337E+01	0.3211990790959E+02
0.2059597759767E+01	0.3212034444757E+02
0.2059971708874E+01	0.3212034899912E+02
0.2059965424879E+01	0.3212034900048E+02

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.2059971708874E+01

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.3212034899912E+02

Acuratetea de calcul a solutiei 0.10000000000000E-04

Exemplul 8

$$y = -x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 60x$$

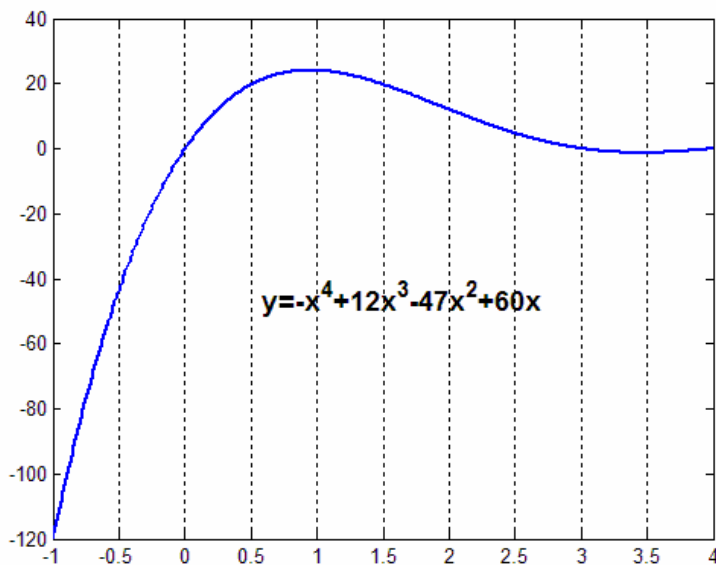


Fig. 8. Graficul funcției $y = -x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 60x$.

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = -0.5$:

X	F(X)	PASUL
-0.50000000000000E+00	-0.43312500000000E+02	0.10000000000000E-02
-0.49900000000000E+00	-0.4319606648600E+02	0.10000000000000E-02
-0.49800000000000E+00	-0.4307976588802E+02	0.10000000000000E-02
-0.49600000000000E+00	-0.4284756310426E+02	0.20000000000000E-02
-0.49200000000000E+00	-0.4238474883610E+02	0.40000000000000E-02
-0.48400000000000E+00	-0.4146546672154E+02	0.80000000000000E-02
-0.46800000000000E+00	-0.3965213829658E+02	0.16000000000000E-01
-0.43600000000000E+00	-0.3612523076122E+02	0.32000000000000E-01

-0.37200000000000E+00	-0.2946094430746E+02	0.64000000000000E-01
-0.24400000000000E+00	-0.1761605794330E+02	0.12800000000000E+00
0.12000000000000E-01	0.7132527152640E+00	0.25600000000000E+00
0.52400000000000E+00	0.2018606990822E+02	0.51200000000000E+00

X*	F(X*)
0.1001449076919E+01	0.2399706617349E+02
0.9553541258462E+00	0.2405469053134E+02
0.9417609729251E+00	0.2405722594355E+02
0.9433238697318E+00	0.2405727838564E+02
0.9434595336472E+00	0.2405727869981E+02
0.9434546227260E+00	0.2405727870024E+02

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.9434595336472E+00

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.2405727869981E+02

Acuratetea de calcul a solutiei 0.10000000000000E-04

Procesul de maximizare din punctual inițial $x_0 = 2.5$:

X	F(X)	PASUL
0.25000000000000E+01	0.46875000000000E+01	0.10000000000000E-02
0.25010000000000E+01	0.4675005501999E+01	0.10000000000000E-02
0.24990000000000E+01	0.4700005497999E+01	-0.10000000000000E-02
0.24980000000000E+01	0.4712521983984E+01	-0.10000000000000E-02
0.24960000000000E+01	0.4737587871744E+01	-0.20000000000000E-02
0.24920000000000E+01	0.4787850971904E+01	-0.40000000000000E-02
0.24840000000000E+01	0.4888899742464E+01	-0.80000000000000E-02
0.24680000000000E+01	0.5093065415424E+01	-0.16000000000000E-01
0.24360000000000E+01	0.5509486934784E+01	-0.32000000000000E-01
0.23720000000000E+01	0.6373149260544E+01	-0.64000000000000E-01
0.22440000000000E+01	0.8210098600704E+01	-0.12800000000000E+00
0.19880000000000E+01	0.1219213706726E+02	-0.25600000000000E+00
0.14760000000000E+01	0.2000767272422E+02	-0.51200000000000E+00

X*	F(X*)
0.1002331242225E+01	0.2399524522714E+02
0.9313176337397E+00	0.2405455698879E+02
0.9433988979113E+00	0.2405727864300E+02
0.9435107776149E+00	0.2405727864247E+02
0.9434547090807E+00	0.2405727870024E+02
0.9435520099199E+00	0.2405727852626E+02
0.9434922653744E+00	0.2405727867432E+02
0.9437089134726E+00	0.2405727751289E+02
0.9434703369459E+00	0.2405727869575E+02
0.9435181220042E+00	0.2405727862634E+02
0.9430725387201E+00	0.2405727601586E+02
0.9434442859185E+00	0.2405727869824E+02
0.9358702615605E+00	0.2405621803454E+02
0.9434545934425E+00	0.2405727870024E+02

Punctul de maxim determinat. xmax= 0.9434547090807E+00

Valoarea functiei in punctul xmax= 0.2405727870024E+02

Acuratetea de calcul a solutiei 0.10000000000000E-04

Referințe

Ghani, S.N., Barnes, L., *Parameter optimization for unconstrained object functions – a bibliography.* Computer-Aided Design, 4, October 1972, pp.247-259.

Kowalik, J.S., Osborne, M.R., *Methods for Unconstrained Optimization Problems.* Elsevier North-Holland, New York, 1968.

Powell, M.J.D., *An efficient method of finding the minimum of a function of several variables without calculation dereivatives.* The Computer Journal, 7, 1964, pp.155-162.

Walsh, G.R., *Methods of Optimization.* John Wiley & Sons, London, 1975. (pp. 93-97)

