FIBO

O SUBRUTINĂ DE CALCUL A MINIMULUI UNEI FUNCȚII NELINIARE DE O VARIABILĂ, PE UN INTERVAL DAT, BAZATĂ PE METODA DE CĂUTARE DIRECTĂ FIBONACCI

Neculai Andrei

Institutul Național de Cercetare Dezvoltare în Informatică
Bucureşti

REZUMAT

În acest raport tehnic se prezintă o subrutină Fortran pentru determinarea minimului unei funcții neliniare de o variabilă pe un interval închis dat, care utilizează metoda Fibonacci. Funcția este foarte generală şi se presupune că nu este derivabilă, sau cel puțin nu se apelează la derivata ei. Punctul de minim care aparține intervalului dat este determinat prin generarea numerelor Fibonacci.

Raport Tehnic
Bucureşti
Februarie 4, 1980

CUPRINS

1. Descrierea algoritmului

1.1. Formularea problemei

Considerăm minimizarea unei funcții neliniare de o singură variabilă supusă la restricții margini simple:

$$\min f(x),\ a \le x \le b, \tag{1}$$

unde marginile inferioară şi superioară, a şi respectiv b, sunt numere reale, cunoscute pentru care $a < b$.
Se presupune că funcția nu este derivabilă sau că nu dispunem de derivata acesteia.

1.2. Metoda de calcul a minimului

Presupunem că funcția este unimodală. Pentru determinarea minimului funcțiilor unimodale de o singură variabilă, neliniare, pentru care variabila aparține unui interval închis cunoscut vom utiliza o metodă de căutare directă.

Metodele de căutare directă au la bază procedee iterative de calcul care se bazează pe evaluarea funcției obiectiv în puncte localizate într-o manieră specială care reduc numărul de evaluări ale funcției.

Fie x^* punctul de minim al funcției f pe intervalul $[a,b]$. O funcție f se numeşte *unimodală* pe un interval dat dacă pentru oricare două puncte x_1 şi x_2 din intervalul dat cu $x_1 \le x_2 \le x^*$ (sau $x^* \le x_1 \le x_2$) sunt satisfăcute condițiile:

$$f(x_1) \ge f(x_2) \ge f(x^*)$$
$$(\text{sau } f(x^*) \le f(x_1) \le f(x_2))$$

Condiția de unimodalitate permite determinarea punctului de minim al funcției f prin reducerea intervalului inițial $[a,b]$ în care se găseşte (sau se presupune că se găseşte) x^* prin evaluări succesive ale funcției date. Intervalul inițial este redus la un interval final a cărui lungime depinde de acuratețea dorită în evaluarea optimului, la limită obținându-se chiar punctul de optim x^*. Localizarea punctelor care determină intervalele de căutare se face prin utilizarea şirului de numere întregi al lui Fibonacci.

Şirul numerelor lui Fibonacci[1] $\{F_n\}$ este definit de:

$$F_0 = F_1 = 1,\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n \ge 2. \tag{2}$$

Câteva numere din şirul numerelor Fibonacci sunt următoarele:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...$$

Rezolvând ecuația cu diferențe finite (2) obținem:

[1] Leonardo din Pisa (1175-1230)

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+1}}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\sqrt{5}-1\right)^{n+1}\right], \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

Din (2) sau din formula de calcul a termenului general F_n dată de (3) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

care este bine-cunoscutul raport de aur (sau secțiunea de aur) cunoscută şi utilizată de pitagoricieni încă cu 500 de ani înainte de Hristos.

Dacă funcția este multimodală, atunci se recomandă utilizarea metodei, şi a subrutinei corespunzătoare, din mai multe puncte inițiale.

1.3. Algoritmul metodei Fibonacci

Utilizând şirul numerelor Fibonacci, algoritmul corespunzător de rezolvare a problemei (1) este următorul.

Pasul 1. Se consideră intervalul inițial de căutare $[a_1, b_1]$, unde $a_1 = a$ şi $b_1 = b.$ Se calculează lungimea acestuia $L_1 = b_1 - a_1$.

Pasul 2. Se impune acuratețea $\varepsilon > 0$ cu care dorim să calculăm intervalul final în care se află punctul de minim. Cu aceasta se determină numărul N al numerelor Fibonacci utilizate în procesul de căutare, conform relațiilor:

$$\varepsilon = \frac{1}{F_N},$$
$$F_0 = F_1 = 1,$$
$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}, \quad N \geq 2.$$

Pasul 3. Se determină primele două puncte x_1 şi x_2 $(x_1 < x_2)$ la distanța l_1 de fiecare margine din interiorul intervalului de căutare:

$$x_1 = a_1 + l_1,$$
$$x_2 = b_1 - l_1,$$

unde

$$l_1 = \frac{F_{N-2}}{F_N} L_1$$

Pasul 4. Se evaluează funcția f în punctele x_1 respectiv x_2 şi se elimină o parte din intervalul $[a_1, b_1]$ prin relațiile:

- Dacă $f(x_1) \leq f(x_2)$ atunci se elimină subintervalul $[x_2, b_1]$. Se pune $a_2 = a_1$ şi respectiv $b_2 = x_2$.
- Dacă $f(x_1) > f(x_2)$ atunci se elimină subintervalul $[a_1, x_1]$. Se pune $a_2 = x_1$ şi respectiv $b_2 = b_1$.

Se calculează lungimea noului interval $L_2 = b_2 - a_2$.

Pasul 5. Se plasează un al treilea punct x_3 în noul subinterval, simetric față de punctul rămas (unul dintre x_1 şi x_2) la distanța l_2:

$$x_3 = a_2 + l_2 \text{ sau } x_3 = b_2 - l_2,$$

unde

$$l_2 = \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} L_2.$$

Pasul 6. Se evaluează funcția f în x_3 şi se compară cu valoarea funcției în punctul rămas din intervalul $[a_2, b_2]$, iar pe baza rezultatelor se reduce intervalul curent.

Pasul 7. Procedeul se continuă pentru cele N evaluări. La pasul k relațiile generale sunt:

$$x_{k+1} = a_k + l_k \text{ sau } x_{k+1} = b_k - l_k$$

unde

$$l_k = \frac{F_{N-(k+1)}}{F_{N-(k-1)}} L_k. \quad \blacksquare$$

2. Descrierea subrutinei

2.1. Considerații generale

Subrutina FIBO este destinată determinării minimului unei funcții unimodale, de o singură variabilă pe un interval dat. Programul, scris în Fortran, are la bază metoda de căutare directă bazată pe şirul numerelor Fibonacci.

Subrutina apelează subrutina FUNC prin care utilizatorul defineşte funcția al cărui minim se caută.

Subrutina FIBO se poate utiliza în cazul funcțiilor nederivabile pe intervalul de căutare al variabilelor impus de utilizator.

Subrutina FIBO editează rezultatele căutării, precum şi intervalul final în care se găseşte minimul împreună cu valorile funcției în capetele intervalului.

2.2. Subrutine apelate

FIBO apelează subrutina FUNC care descrie expresia algebrică a funcției de minimizat.

Subrutina FUNC se descrie sub forma

FUNC(x,y),

unde x este valoarea variabilei, iar y valoarea funcției în x, adică $y = f(x)$.

2.3. Descrierea parametrilor subrutinei

Într-un program în care se doreşte minimizarea unei funcții unimodale, de o singură variabilă subrutina FIBO se apelează sub forma:

CALL FIBO(A,B,EPS)

unde

A	este o variabilă reală, care reprezintă marginea inferioară a intervalului în care se caută minimul funcției f.

B	este o variabilă reală, care reprezintă marginea superioară a intervalului în care se caută minimul funcției f.

EPS	variabilă reală care precizează acuratețea cu care utilizatorul dorește determinarea intervalului final care conține minimul. În funcție de acest parametru se determină numărul de numere Fibonacci utilizate în căutare.

2.4. Structuri de date

Subrutina utilizează o instrucțiune de alocare a unei arii reale FIB(100) care conține numerele Fibonacci.

Dacă EPS este mai mare sau egal cu 0.5 atunci subrutina va pune automat EPS la valoarea 0.001 şi tipăreşte un mesaj.

Subrutina editează rezultatele intermediare ale procesului de calcul:

K	indicele intervalului (iterația)
VI	lungimea intervalului (L_k)
AK	marginea inferioară a intervalului (a_k)
BK	marginea superioară a intervalului (b_k)
RVI	raport din lungimea intervalului (l_k)
X	valoarea variabilei independente
F(X)	valoarea funcției în punctul X.

3. Probleme de test

Pentru a ilustra funcționarea subrutinei FIBO se consideră următoarele exemple de funcții neliniare pentru care se cere determinarea unui punct de minim într-un interval dat.

Exemplul 1.

$$\min\left(x^2-6x+2\right)$$

unde $0 \le x \le 10$.

În figura 1 se prezintă graficul funcției

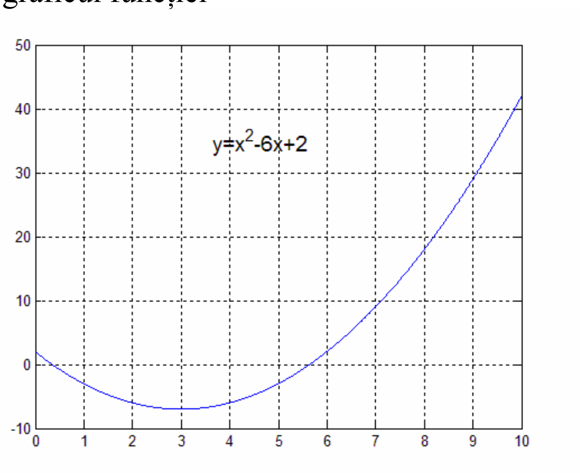

Fig. 1. Graficul funcției x^2-6x+2

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$3 \le x \le 3,$$
$$-7 \le f(x) \le -7.$$

Exemplul 2.

$$\min\left(x^5 - 2x^3 + 10\sin(5x)\right),$$

unde $0.75 \le x \le 1.25$.
În figura 2 se prezintă graficul funcției.

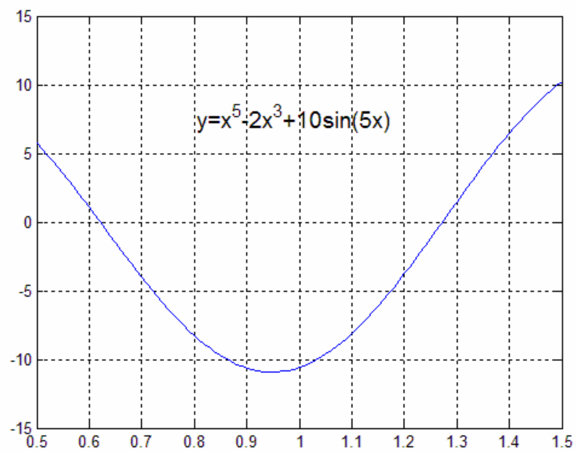

Fig. 2. Graficul funcției $y = x^5 - 2x^3 + 10\sin(5x)$

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$0.948 \le x \le 0.948,$$
$$-10.9 \le f(x) \le -10.9.$$

Exemplul 3.

$$\min\left(1 - 10x + 0.01e^x\right),$$

unde $4 \le x \le 10$.
Figura 3 prezintă graficul funcției

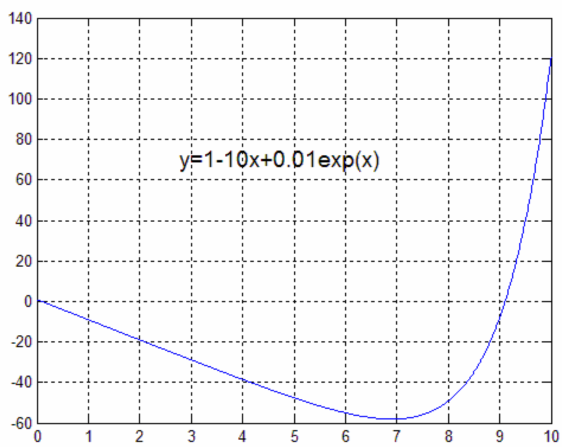

Fig. 3. Graficul funcției $y = 1 - 10x + 0.01e^x$

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$6.91 \le x \le 6.91,$$
$$-58.1 \le f(x) \le -58.1.$$

Exemplul 4.

$$\min\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right),$$

unde $-2 \le x \le +2$.
În figura 4 se prezintă graficul funcției.

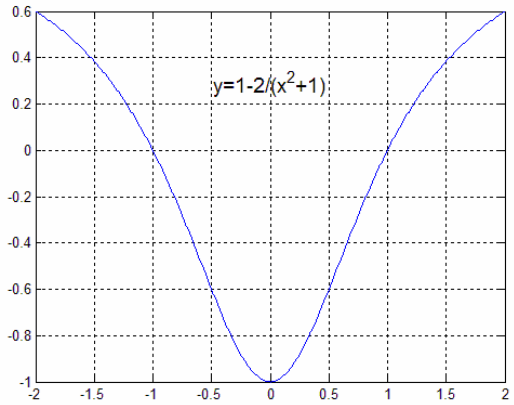

Fig. 4. Graficul funcției $y = 1 - 2/(x^2+1)$.

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$-0.177e-15 \le x \le 0.113e-5,$$
$$-1 \le f(x) \le -1.$$

Exemplul 5

$$\min\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

unde $-3 \le x \le 0$.
Graficul funcției este arătat în figura 5.

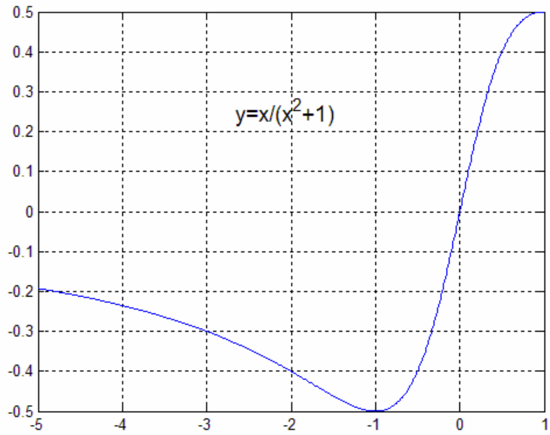

Fig. 5. Graficul funcției $y = x/(x^2+1)$.

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$-1 \le x \le -1,$$
$$-0.5 \le f(x) \le -0.5.$$

Exemplul 6

$$\min\left(5x^5 - 4x^4 + 400x\sin(4x-4)\right)$$

unde $1 \le x \le 3$.

Figura 6 prezintă graficul funcției.

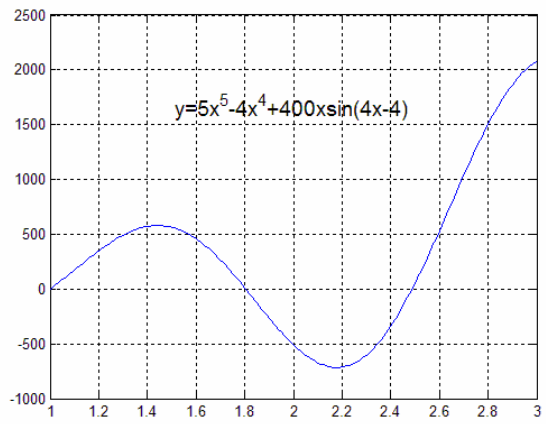

Fig.6. Graficul funcției $y = 5x^5 - 4x^4 + 400x\sin(4x-4)$.

Considerând EPS=0.0000003 se obțin rezultatele:

$$2.18 \le x \le 2.18,$$
$$-716 \le f(x) \le -716.$$

4. Listarea programelor

```
C*************************************************************
C
C                              FIBO
C                           ==========
C
C      Subrutina de calcul a minimului unei functii neliniare
C      de o variabila reala pe un interval dat:
C
C      min(f(x)), x apartine intervalului inchis [a,b].
C
C      Subrutina implementeaza metoda de cautare directa Fibonacci.
C      Nu necesita evaluarea derivatelor.
C
C      Secventa de apel:
C      call fibo(a,b,eps)
C      unde:
C      a   = marginea inferioara a intervalului de cautare
C      b   = marginea superioara a intervalului de cautare
C      eps = acuratetea de calcul a solutiei, lungimea intervalului
C            in care se gaseste solutia.
C
C      Acuratetea de calcul a solutiei determina numarul de
C      numere Fibonacci utilizate in procesul de calcul.
C
C      Subrutine apelate:
C      Subroutine func(x,v)
C        x punctul in care se calculeaza valoarea functiei
```

```
C       v = f(x)  valoarea functiei in punctul x.
C
C                                                      Neculai Andrei
C                                               1980, ICI - Bucuresti
C****************************************************************
C
      subroutine fibo(a,b,eps)
      real*8 a,b,eps

      integer n,j,k,ii,nm2
      real*8 fib(100)
      real*8 fn,vfn,vi,rvi,vb,va,v,w,t,u
      real*8 dif,eps1,dep,w1,pre

C--- Output file

      open(unit=1,file='fibo.sol',status='unknown')
*
      if(b .lt. a) then
        write(1,108)
        return
      end if

      dif=b-a

C--- Calculul numerelor Fibonacci. 1,1,2,3,5,8,13,....

      fib(1)=1.d0
      fib(2)=1.d0
1       fn=1.d0/eps
        if(fn - 2.d0) 2,2,3
2       go to 6
3       continue
        n=2
4       n=n+1
      fib(n)=fib(n-1) + fib(n-2)
        vfn = fib(n)
        if(vfn-fn) 5,7,7
5       go to 4
6       write(1,100)
      eps = 0.01d0
      go to 1

C--- Prima iteratie

7     j=n
      k=n-2
      vi=b-a
      rvi=fib(k)*vi/fib(j)
      w=a+rvi
      v=b-rvi

      call func(w,t)
      call func(v,u)

      ii=1

      write(1,101)
      write(1,102) ii,vi,a,b,rvi,v,u

C--- Continuarea iteratiilor.

      k=k-1
      j=j-1
      nm2=n-2

      do 14 i=1,nm2
        if(u-t) 8,8,11
```

```
8         a=a+rvi
          vi=b-a
          w=v
          t=u
          rvi=fib(k)*vi/fib(j)
          v=b-rvi

          call func(v,u)

          ii=i+1
          k=k-1
          j=j-1
          if(k-1) 9,10,10
9         k=1
10        continue

          write(1,102) ii,vi,a,b,rvi,w,t
          write(1,103) v,u

          go to 14

11        b=b-rvi
          vi=b-a
          v=w
          u=t
          rvi=fib(k)*vi/fib(j)
          w=a+rvi

          call func(w,t)

          ii=i+1
          k=k-1
          j=j-1
          if(k-1) 12,13,13
12        k=1
13        continue
          write(1,102) ii,vi,a,b,rvi,v,u
          write(1,103) w,t
14    continue

C--- Ultima iteratie. Calculul intervalului final.

      eps1=0.001*w
      dep=w+eps1

      call func(dep,w1)

      if(w1-t) 15,15,16

15      call func(b,vb)

        write(1,104) w,b
        write(1,105) t,vb
        go to 17

16      call func(a,va)

        write(1,104) w,a
        write(1,105) t,va

C--- Calculul preciziei.

17    pre=(w-a)/dif

      write(1,106) pre
      write(1,107) eps

C--- Formate
```

```
100   format(4x,'Acuratetea de calcul eps insuficienta.'/,
     *       4x,'Se considera eps=0.01')

101   format(2x,1hk,5x,2hvi,10x,2hAK,11x,2hBK,9x,3hRVI,
     *       11x,1hX,10x,4hF(x))

102   format(1x,i2,2x,e10.3,2x,e10.3,2x,e10.3,2x,e10.3,
     *             2x,e10.3,2x,e10.3)

103   format(53x,e10.3,2x,e10.3)

104   format(10x,'Intervalul final',4x,6h  X1 =,e10.3,
     *        3x,6h  X2 =,e10.3)

105   format(10x,'Valoarea functiei',3x,6hf(X1)=,e10.3,
     *        3x,6hf(X2)=,e10.3)

106   format(10x,'Acuratetea de calcul obtinuta:',7x,e10.3)

107   format(10x,'Acuratetea ceruta:            ',7x,e10.3)

108   format(10x,'Marginea superioara mai mica decat cea inferioara')

      return
      end

C***************************************************************


      subroutine func(x,y)
      real*8 x,y

* Exemplul 1
c1      y = x*x - 6.d0*x + 2.d0

* Exemplul 2
c2      y = x**5 - 2.d0*x**3 +10.d0*dsin(5.d0*x)

* Exemplul 3
c3      y = 1.d0 - 10.d0*x + 0.01d0*exp(x)

* Exemplul 4
c4      y=1.d0-2.d0/(x**2+1.d0)

* Exemplul 5
c5      y=x/(x*x+1.d0)

* Exemplul 6
      y=5.d0*x**5-4.d0*x**4+400.d0*x*dsin(4.d0*x-4.d0)


      return
      end
C***************************************************************




C***************************************************************
C
C    Main program

      real*8 a,b,eps

* Exemplul 1
c1       a=0.d0
c1       b=10.d0
```

```
c1       eps=0.0000003d0

* Exemplul 2
c2       a=0.75d0
c2       b=1.25d0
c2       eps=0.0000003d0

* Exemplul 3
c3       a=4.d0
c3       b=10.d0
c3       eps=0.0000003d0

* Exemplul 4
c4       a=-2.d0
c4       b= 2.d0
c4       eps=0.0000003d0

* Exemplul 5
c5      a=-3.d0
c5      b= 0.d0
c5      eps=0.0000003d0

* Exemplul 6
        a=1.d0
        b=3.d0
        eps=0.0000003d0


      call fibo(a,b,eps)

      stop
      end
C*****************************************************Last line
```

5. Listarea rezultatelor pentru problemele de test considerate

Exemplul 1

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.100E+02	0.000E+00	0.100E+02	0.382E+01	0.618E+01	0.311E+01
2	0.618E+01	0.000E+00	0.618E+01	0.236E+01	0.382E+01	-0.633E+01
					0.236E+01	-0.659E+01
3	0.382E+01	0.000E+00	0.382E+01	0.146E+01	0.236E+01	-0.659E+01
					0.146E+01	-0.463E+01
4	0.236E+01	0.146E+01	0.382E+01	0.902E+00	0.236E+01	-0.659E+01
					0.292E+01	-0.699E+01
5	0.146E+01	0.236E+01	0.382E+01	0.557E+00	0.292E+01	-0.699E+01
					0.326E+01	-0.693E+01
6	0.902E+00	0.236E+01	0.326E+01	0.344E+00	0.292E+01	-0.699E+01
					0.271E+01	-0.691E+01
7	0.557E+00	0.271E+01	0.326E+01	0.213E+00	0.292E+01	-0.699E+01
					0.305E+01	-0.700E+01
8	0.344E+00	0.292E+01	0.326E+01	0.132E+00	0.305E+01	-0.700E+01
					0.313E+01	-0.698E+01
9	0.213E+00	0.292E+01	0.313E+01	0.813E-01	0.305E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
10	0.132E+00	0.292E+01	0.305E+01	0.502E-01	0.300E+01	-0.700E+01
					0.297E+01	-0.700E+01
11	0.813E-01	0.297E+01	0.305E+01	0.311E-01	0.300E+01	-0.700E+01
					0.302E+01	-0.700E+01
12	0.502E-01	0.297E+01	0.302E+01	0.192E-01	0.300E+01	-0.700E+01
					0.299E+01	-0.700E+01
13	0.311E-01	0.299E+01	0.302E+01	0.119E-01	0.300E+01	-0.700E+01
					0.301E+01	-0.700E+01
14	0.192E-01	0.299E+01	0.301E+01	0.733E-02	0.300E+01	-0.700E+01
					0.299E+01	-0.700E+01

15	0.119E-01	0.299E+01	0.301E+01	0.453E-02	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
16	0.733E-02	0.299E+01	0.300E+01	0.280E-02	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
17	0.453E-02	0.300E+01	0.300E+01	0.173E-02	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
18	0.280E-02	0.300E+01	0.300E+01	0.107E-02	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
19	0.173E-02	0.300E+01	0.300E+01	0.661E-03	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
20	0.107E-02	0.300E+01	0.300E+01	0.409E-03	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
21	0.661E-03	0.300E+01	0.300E+01	0.253E-03	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
22	0.409E-03	0.300E+01	0.300E+01	0.156E-03	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
23	0.253E-03	0.300E+01	0.300E+01	0.965E-04	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
24	0.156E-03	0.300E+01	0.300E+01	0.596E-04	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
25	0.965E-04	0.300E+01	0.300E+01	0.369E-04	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
26	0.596E-04	0.300E+01	0.300E+01	0.227E-04	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
27	0.369E-04	0.300E+01	0.300E+01	0.142E-04	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
28	0.227E-04	0.300E+01	0.300E+01	0.851E-05	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
29	0.142E-04	0.300E+01	0.300E+01	0.567E-05	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
30	0.851E-05	0.300E+01	0.300E+01	0.284E-05	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
31	0.567E-05	0.300E+01	0.300E+01	0.284E-05	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01
32	0.284E-05	0.300E+01	0.300E+01	0.284E-05	0.300E+01	-0.700E+01
					0.300E+01	-0.700E+01

```
Intervalul final      X1 = 0.300E+01     X2 = 0.300E+01
Valoarea functiei   f(X1)=-0.700E+01   f(X2)=-0.700E+01
Acuratetea de calcul obtinuta:       -0.444E-16
Acuratetea ceruta:                    0.300E-06
```

Exemplul 2

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.500E+00	0.750E+00	0.125E+01	0.191E+00	0.106E+01	-0.939E+01
2	0.309E+00	0.750E+00	0.106E+01	0.118E+00	0.941E+00	-0.109E+02
					0.868E+00	-0.101E+02
3	0.191E+00	0.868E+00	0.106E+01	0.729E-01	0.941E+00	-0.109E+02
					0.986E+00	-0.107E+02
4	0.118E+00	0.868E+00	0.986E+00	0.451E-01	0.941E+00	-0.109E+02
					0.913E+00	-0.108E+02
5	0.729E-01	0.913E+00	0.986E+00	0.279E-01	0.941E+00	-0.109E+02
					0.958E+00	-0.109E+02
6	0.451E-01	0.913E+00	0.958E+00	0.172E-01	0.941E+00	-0.109E+02
					0.930E+00	-0.109E+02
7	0.279E-01	0.930E+00	0.958E+00	0.106E-01	0.941E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
8	0.172E-01	0.941E+00	0.958E+00	0.658E-02	0.948E+00	-0.109E+02
					0.952E+00	-0.109E+02
9	0.106E-01	0.941E+00	0.952E+00	0.407E-02	0.948E+00	-0.109E+02
					0.945E+00	-0.109E+02
10	0.658E-02	0.945E+00	0.952E+00	0.251E-02	0.948E+00	-0.109E+02
					0.949E+00	-0.109E+02
11	0.407E-02	0.945E+00	0.949E+00	0.155E-02	0.948E+00	-0.109E+02
					0.947E+00	-0.109E+02
12	0.251E-02	0.947E+00	0.949E+00	0.960E-03	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02

13	0.155E-02	0.948E+00	0.949E+00	0.593E-03	0.948E+00	-0.109E+02
					0.949E+00	-0.109E+02
14	0.960E-03	0.948E+00	0.949E+00	0.367E-03	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
15	0.593E-03	0.948E+00	0.948E+00	0.227E-03	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
16	0.367E-03	0.948E+00	0.948E+00	0.140E-03	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
17	0.227E-03	0.948E+00	0.948E+00	0.865E-04	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
18	0.140E-03	0.948E+00	0.948E+00	0.535E-04	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
19	0.865E-04	0.948E+00	0.948E+00	0.331E-04	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
20	0.535E-04	0.948E+00	0.948E+00	0.204E-04	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
21	0.331E-04	0.948E+00	0.948E+00	0.126E-04	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
22	0.204E-04	0.948E+00	0.948E+00	0.780E-05	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
23	0.126E-04	0.948E+00	0.948E+00	0.482E-05	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
24	0.780E-05	0.948E+00	0.948E+00	0.298E-05	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
25	0.482E-05	0.948E+00	0.948E+00	0.184E-05	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
26	0.298E-05	0.948E+00	0.948E+00	0.113E-05	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
27	0.184E-05	0.948E+00	0.948E+00	0.709E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
28	0.113E-05	0.948E+00	0.948E+00	0.426E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
29	0.709E-06	0.948E+00	0.948E+00	0.284E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
30	0.426E-06	0.948E+00	0.948E+00	0.142E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
31	0.284E-06	0.948E+00	0.948E+00	0.142E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02
32	0.142E-06	0.948E+00	0.948E+00	0.142E-06	0.948E+00	-0.109E+02
					0.948E+00	-0.109E+02

```
Intervalul final      X1 = 0.948E+00     X2 = 0.948E+00
Valoarea functiei   f(X1)=-0.109E+02   f(X2)=-0.109E+02
Acuratetea de calcul obtinuta:        0.284E-06
Acuratetea ceruta:                    0.300E-06
```

Exemplul 3

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.600E+01	0.400E+01	0.100E+02	0.229E+01	0.771E+01	-0.538E+02
2	0.371E+01	0.400E+01	0.771E+01	0.142E+01	0.629E+01	-0.565E+02
					0.542E+01	-0.509E+02
3	0.229E+01	0.542E+01	0.771E+01	0.875E+00	0.629E+01	-0.565E+02
					0.683E+01	-0.581E+02
4	0.142E+01	0.629E+01	0.771E+01	0.541E+00	0.683E+01	-0.581E+02
					0.717E+01	-0.577E+02
5	0.875E+00	0.629E+01	0.717E+01	0.334E+00	0.683E+01	-0.581E+02
					0.663E+01	-0.577E+02
6	0.541E+00	0.663E+01	0.717E+01	0.207E+00	0.683E+01	-0.581E+02
					0.696E+01	-0.581E+02
7	0.334E+00	0.683E+01	0.717E+01	0.128E+00	0.696E+01	-0.581E+02
					0.704E+01	-0.580E+02
8	0.207E+00	0.683E+01	0.704E+01	0.789E-01	0.696E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
9	0.128E+00	0.683E+01	0.696E+01	0.488E-01	0.691E+01	-0.581E+02
					0.688E+01	-0.581E+02
10	0.789E-01	0.688E+01	0.696E+01	0.301E-01	0.691E+01	-0.581E+02
					0.693E+01	-0.581E+02

11	0.488E-01	0.688E+01	0.693E+01	0.186E-01	0.691E+01	-0.581E+02
					0.690E+01	-0.581E+02
12	0.301E-01	0.690E+01	0.693E+01	0.115E-01	0.691E+01	-0.581E+02
					0.692E+01	-0.581E+02
13	0.186E-01	0.690E+01	0.692E+01	0.712E-02	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
14	0.115E-01	0.690E+01	0.691E+01	0.440E-02	0.691E+01	-0.581E+02
					0.690E+01	-0.581E+02
15	0.712E-02	0.690E+01	0.691E+01	0.272E-02	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
16	0.440E-02	0.690E+01	0.691E+01	0.168E-02	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
17	0.272E-02	0.691E+01	0.691E+01	0.104E-02	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
18	0.168E-02	0.691E+01	0.691E+01	0.642E-03	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
19	0.104E-02	0.691E+01	0.691E+01	0.397E-03	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
20	0.642E-03	0.691E+01	0.691E+01	0.245E-03	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
21	0.397E-03	0.691E+01	0.691E+01	0.152E-03	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
22	0.245E-03	0.691E+01	0.691E+01	0.936E-04	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
23	0.152E-03	0.691E+01	0.691E+01	0.579E-04	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
24	0.936E-04	0.691E+01	0.691E+01	0.357E-04	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
25	0.579E-04	0.691E+01	0.691E+01	0.221E-04	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
26	0.357E-04	0.691E+01	0.691E+01	0.136E-04	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
27	0.221E-04	0.691E+01	0.691E+01	0.851E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
28	0.136E-04	0.691E+01	0.691E+01	0.511E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
29	0.851E-05	0.691E+01	0.691E+01	0.340E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
30	0.511E-05	0.691E+01	0.691E+01	0.170E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
31	0.340E-05	0.691E+01	0.691E+01	0.170E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02
32	0.170E-05	0.691E+01	0.691E+01	0.170E-05	0.691E+01	-0.581E+02
					0.691E+01	-0.581E+02

```
Intervalul final      X1 = 0.691E+01     X2 = 0.691E+01
Valoarea functiei   f(X1)=-0.581E+02   f(X2)=-0.581E+02
Acuratetea de calcul obtinuta:        0.000E+00
Acuratetea ceruta:                    0.300E-06
```

Exemplul 4

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.400E+01	-0.200E+01	0.200E+01	0.153E+01	0.472E+00	-0.635E+00
2	0.247E+01	-0.472E+00	0.200E+01	0.944E+00	0.472E+00	-0.635E+00
					0.106E+01	0.542E-01
3	0.153E+01	-0.472E+00	0.106E+01	0.584E+00	0.472E+00	-0.635E+00
					0.111E+00	-0.975E+00
4	0.944E+00	-0.472E+00	0.472E+00	0.361E+00	0.111E+00	-0.975E+00
					-0.111E+00	-0.975E+00
5	0.584E+00	-0.111E+00	0.472E+00	0.223E+00	0.111E+00	-0.975E+00
					0.249E+00	-0.883E+00
6	0.361E+00	-0.111E+00	0.249E+00	0.138E+00	0.111E+00	-0.975E+00
					0.263E-01	-0.999E+00
7	0.223E+00	-0.111E+00	0.111E+00	0.851E-01	0.263E-01	-0.999E+00
					-0.263E-01	-0.999E+00
8	0.138E+00	-0.263E-01	0.111E+00	0.526E-01	0.263E-01	-0.999E+00
					0.588E-01	-0.993E+00

9	0.851E-01	-0.263E-01	0.588E-01	0.325E-01	0.263E-01	-0.999E+00
					0.621E-02	-0.100E+01
10	0.526E-01	-0.263E-01	0.263E-01	0.201E-01	0.621E-02	-0.100E+01
					-0.621E-02	-0.100E+01
11	0.325E-01	-0.621E-02	0.263E-01	0.124E-01	0.621E-02	-0.100E+01
					0.139E-01	-0.100E+01
12	0.201E-01	-0.621E-02	0.139E-01	0.768E-02	0.621E-02	-0.100E+01
					0.147E-02	-0.100E+01
13	0.124E-01	-0.621E-02	0.621E-02	0.474E-02	0.147E-02	-0.100E+01
					-0.147E-02	-0.100E+01
14	0.768E-02	-0.147E-02	0.621E-02	0.293E-02	0.147E-02	-0.100E+01
					0.328E-02	-0.100E+01
15	0.474E-02	-0.147E-02	0.328E-02	0.181E-02	0.147E-02	-0.100E+01
					0.346E-03	-0.100E+01
16	0.293E-02	-0.147E-02	0.147E-02	0.112E-02	0.346E-03	-0.100E+01
					-0.346E-03	-0.100E+01
17	0.181E-02	-0.346E-03	0.147E-02	0.692E-03	0.346E-03	-0.100E+01
					0.774E-03	-0.100E+01
18	0.112E-02	-0.346E-03	0.774E-03	0.428E-03	0.346E-03	-0.100E+01
					0.817E-04	-0.100E+01
19	0.692E-03	-0.346E-03	0.346E-03	0.264E-03	0.817E-04	-0.100E+01
					-0.817E-04	-0.100E+01
20	0.428E-03	-0.817E-04	0.346E-03	0.163E-03	0.817E-04	-0.100E+01
					0.183E-03	-0.100E+01
21	0.264E-03	-0.817E-04	0.183E-03	0.101E-03	0.817E-04	-0.100E+01
					0.193E-04	-0.100E+01
22	0.163E-03	-0.817E-04	0.817E-04	0.624E-04	0.193E-04	-0.100E+01
					-0.193E-04	-0.100E+01
23	0.101E-03	-0.193E-04	0.817E-04	0.386E-04	0.193E-04	-0.100E+01
					0.431E-04	-0.100E+01
24	0.624E-04	-0.193E-04	0.431E-04	0.238E-04	0.193E-04	-0.100E+01
					0.454E-05	-0.100E+01
25	0.386E-04	-0.193E-04	0.193E-04	0.148E-04	0.454E-05	-0.100E+01
					-0.454E-05	-0.100E+01
26	0.238E-04	-0.454E-05	0.193E-04	0.908E-05	0.454E-05	-0.100E+01
					0.102E-04	-0.100E+01
27	0.148E-04	-0.454E-05	0.102E-04	0.567E-05	0.454E-05	-0.100E+01
					0.113E-05	-0.100E+01
28	0.908E-05	-0.454E-05	0.454E-05	0.340E-05	0.113E-05	-0.100E+01
					-0.113E-05	-0.100E+01
29	0.567E-05	-0.113E-05	0.454E-05	0.227E-05	0.113E-05	-0.100E+01
					0.227E-05	-0.100E+01
30	0.340E-05	-0.113E-05	0.227E-05	0.113E-05	0.113E-05	-0.100E+01
					-0.177E-15	-0.100E+01
31	0.227E-05	-0.113E-05	0.113E-05	0.113E-05	-0.177E-15	-0.100E+01
					-0.177E-15	-0.100E+01
32	0.113E-05	-0.177E-15	0.113E-05	0.113E-05	-0.177E-15	-0.100E+01
					-0.177E-15	-0.100E+01

```
Intervalul final       X1 =-0.177E-15      X2 = 0.113E-05
Valoarea functiei   f(X1)=-0.100E+01   f(X2)=-0.100E+01
Acuratetea de calcul obtinuta:        0.000E+00
Acuratetea ceruta:                    0.300E-06
```

Exemplul 5

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.300E+01	-0.300E+01	0.000E+00	0.115E+01	-0.115E+01	-0.495E+00
2	0.185E+01	-0.185E+01	0.000E+00	0.708E+00	-0.115E+01	-0.495E+00
					-0.708E+00	-0.472E+00
3	0.115E+01	-0.185E+01	-0.708E+00	0.438E+00	-0.115E+01	-0.495E+00
					-0.142E+01	-0.471E+00
4	0.708E+00	-0.142E+01	-0.708E+00	0.271E+00	-0.115E+01	-0.495E+00
					-0.979E+00	-0.500E+00
5	0.438E+00	-0.115E+01	-0.708E+00	0.167E+00	-0.979E+00	-0.500E+00
					-0.875E+00	-0.496E+00
6	0.271E+00	-0.115E+01	-0.875E+00	0.103E+00	-0.979E+00	-0.500E+00
					-0.104E+01	-0.500E+00

7	0.167E+00	-0.104E+01	-0.875E+00	0.639E-01	-0.979E+00	-0.500E+00
					-0.939E+00	-0.499E+00
8	0.103E+00	-0.104E+01	-0.939E+00	0.395E-01	-0.979E+00	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
9	0.639E-01	-0.104E+01	-0.979E+00	0.244E-01	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.102E+01	-0.500E+00
10	0.395E-01	-0.102E+01	-0.979E+00	0.151E-01	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.994E+00	-0.500E+00
11	0.244E-01	-0.102E+01	-0.994E+00	0.932E-02	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.101E+01	-0.500E+00
12	0.151E-01	-0.101E+01	-0.994E+00	0.576E-02	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
13	0.932E-02	-0.100E+01	-0.994E+00	0.356E-02	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.997E+00	-0.500E+00
14	0.576E-02	-0.100E+01	-0.997E+00	0.220E-02	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
15	0.356E-02	-0.100E+01	-0.997E+00	0.136E-02	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.999E+00	-0.500E+00
16	0.220E-02	-0.100E+01	-0.999E+00	0.840E-03	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
17	0.136E-02	-0.100E+01	-0.100E+01	0.519E-03	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
18	0.840E-03	-0.100E+01	-0.100E+01	0.321E-03	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
19	0.519E-03	-0.100E+01	-0.100E+01	0.198E-03	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
20	0.321E-03	-0.100E+01	-0.100E+01	0.123E-03	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
21	0.198E-03	-0.100E+01	-0.100E+01	0.758E-04	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
22	0.123E-03	-0.100E+01	-0.100E+01	0.468E-04	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
23	0.758E-04	-0.100E+01	-0.100E+01	0.289E-04	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
24	0.468E-04	-0.100E+01	-0.100E+01	0.179E-04	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
25	0.289E-04	-0.100E+01	-0.100E+01	0.111E-04	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
26	0.179E-04	-0.100E+01	-0.100E+01	0.681E-05	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
27	0.111E-04	-0.100E+01	-0.100E+01	0.426E-05	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
28	0.681E-05	-0.100E+01	-0.100E+01	0.255E-05	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
29	0.426E-05	-0.100E+01	-0.100E+01	0.170E-05	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
30	0.255E-05	-0.100E+01	-0.100E+01	0.851E-06	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
31	0.170E-05	-0.100E+01	-0.100E+01	0.851E-06	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00
32	0.851E-06	-0.100E+01	-0.100E+01	0.851E-06	-0.100E+01	-0.500E+00
					-0.100E+01	-0.500E+00

Intervalul final X1 =-0.100E+01 X2 =-0.100E+01
Valoarea functiei f(X1)=-0.500E+00 f(X2)=-0.500E+00
Acuratetea de calcul obtinuta: 0.000E+00
Acuratetea ceruta: 0.300E-06

Exemplul 6

k	vi	AK	BK	RVI	X	F(x)
1	0.200E+01	0.100E+01	0.300E+01	0.764E+00	0.224E+01	-0.691E+03
2	0.124E+01	0.176E+01	0.300E+01	0.472E+00	0.224E+01	-0.691E+03
					0.253E+01	0.180E+03
3	0.764E+00	0.176E+01	0.253E+01	0.292E+00	0.224E+01	-0.691E+03
					0.206E+01	-0.614E+03
4	0.472E+00	0.206E+01	0.253E+01	0.180E+00	0.224E+01	-0.691E+03
					0.235E+01	-0.497E+03

5	0.292E+00	0.206E+01	0.235E+01	0.111E+00	0.224E+01	-0.691E+03
					0.217E+01	-0.715E+03
6	0.180E+00	0.206E+01	0.224E+01	0.689E-01	0.217E+01	-0.715E+03
					0.212E+01	-0.696E+03
7	0.111E+00	0.212E+01	0.224E+01	0.426E-01	0.217E+01	-0.715E+03
					0.219E+01	-0.714E+03
8	0.689E-01	0.212E+01	0.219E+01	0.263E-01	0.217E+01	-0.715E+03
					0.215E+01	-0.711E+03
9	0.426E-01	0.215E+01	0.219E+01	0.163E-01	0.217E+01	-0.715E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
10	0.263E-01	0.217E+01	0.219E+01	0.100E-01	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
11	0.163E-01	0.217E+01	0.218E+01	0.621E-02	0.218E+01	-0.716E+03
					0.217E+01	-0.716E+03
12	0.100E-01	0.217E+01	0.218E+01	0.384E-02	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
13	0.621E-02	0.217E+01	0.218E+01	0.237E-02	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
14	0.384E-02	0.218E+01	0.218E+01	0.147E-02	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
15	0.237E-02	0.218E+01	0.218E+01	0.906E-03	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
16	0.147E-02	0.218E+01	0.218E+01	0.560E-03	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
17	0.906E-03	0.218E+01	0.218E+01	0.346E-03	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
18	0.560E-03	0.218E+01	0.218E+01	0.214E-03	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
19	0.346E-03	0.218E+01	0.218E+01	0.132E-03	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
20	0.214E-03	0.218E+01	0.218E+01	0.817E-04	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
21	0.132E-03	0.218E+01	0.218E+01	0.505E-04	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
22	0.817E-04	0.218E+01	0.218E+01	0.312E-04	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
23	0.505E-04	0.218E+01	0.218E+01	0.193E-04	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
24	0.312E-04	0.218E+01	0.218E+01	0.119E-04	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
25	0.193E-04	0.218E+01	0.218E+01	0.738E-05	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
26	0.119E-04	0.218E+01	0.218E+01	0.454E-05	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
27	0.738E-05	0.218E+01	0.218E+01	0.284E-05	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
28	0.454E-05	0.218E+01	0.218E+01	0.170E-05	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
29	0.284E-05	0.218E+01	0.218E+01	0.113E-05	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
30	0.170E-05	0.218E+01	0.218E+01	0.567E-06	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
31	0.113E-05	0.218E+01	0.218E+01	0.567E-06	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03
32	0.567E-06	0.218E+01	0.218E+01	0.567E-06	0.218E+01	-0.716E+03
					0.218E+01	-0.716E+03

```
Intervalul final      X1 = 0.218E+01     X2 = 0.218E+01
Valoarea functiei   f(X1)=-0.716E+03   f(X2)=-0.716E+03
Acuratetea de calcul obtinuta:       -0.222E-15
Acuratetea ceruta:                    0.300E-06
```

Referințe bibliografice

Ionescu, Vlad, Lupşa L., *Tehnici de calcul în teoria sistemelor, vol. II.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

Iacoby, S., Kovalik, I., Pizzo, T., *Iterative methods for nonlinear optimization problems.* Academic Press, New York, 1968.

Himmelblau, D.M., *Applied Nonlinear Programming.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

Walsh, G.R., *Methods of Optimization.* John Wiley & Sons, London, 1975.

♦

----------oooooOooooo----------